КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ

Кафедра общей физики

И.Р.МУХАМЕДШИН, А.И.ФИШМАН

АНАЛИЗ ГРАФИКОВ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Методическое пособие

Казань – 2015

УДК 531-14, 53.05

Принято на заседании кафедры общей физики
Протокол № 6 от 6 марта 2015 года

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики КФУ
А.И.Скворцов

Мухамедшин И.Р., Фишман А.И.

Анализ графиков кинематических величин движения материальной точки

/ **И.Р.Мухамедшин, А.И.Фишман** – Казань: Казан. ун-т, 2015. – 16 с.

Пособие содержит теоретический материал, необходимый для овладения общими методами анализа зависимостей физических величин, представленных в виде графиков. В качестве примера приведен подробный анализ графиков кинематических величин (перемещения, скорости и ускорения) для прямолинейного равнопеременного движения материальной точки. Показан метод построения графиков кинематических величин по заданному графику одной из них. Для закрепления освоенного материала в пособии приведены задания для самостоятельного решения с ответами. Настоящее пособие адресовано широкому кругу читателей, изучающих раздел «Механика» курса общей физики.

СОДЕРЖАНИЕ

Основные понятия и формулы кинематики

Радиус-вектором $\vec{\boldsymbol{r}}$ материальной точки *A* называется вектор, проведенный из начала координат в точку *A*. При движении материальной точки геометрическое место концов радиус-вектора $\vec{\boldsymbol{r}}(t)$ есть ***траектория*** материальной точки. В трехмерном пространстве $\vec{\boldsymbol{r}}(t)$ определяется тремя скалярными функциями $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – координатами точки *A*:

$$\vec{\boldsymbol{r}}(t) = x(t)\vec{\boldsymbol{e}}_x + y(t)\vec{\boldsymbol{e}}_y + z(t)\vec{\boldsymbol{e}}_z \ , \qquad (1)$$

где $\vec{\mathbf{e}}_x$, $\vec{\mathbf{e}}_y$, $\vec{\mathbf{e}}_z$ орты координатных осей.

В дальнейшем мы будем использовать декартову систему координат (СК). В ней координаты $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ равны проекциям радиус-вектора на оси координат.

Перемещение материальной точки $\Delta\vec{\boldsymbol{r}}$ представляет собой приращение радиус-вектора $\vec{\boldsymbol{r}}$ за время $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\Delta\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t_{\mathbf{2}}) \ - \ \vec{\boldsymbol{r}}(t_1) \ . \qquad (2)$$

Средняя скорость за время Δt определяется как:

$$\langle\vec{\mathbf{v}}(t)\rangle_{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \ , \qquad (3)$$

Мгновенная линейная ***скорость*** материальной точки в момент времени *t* определяется как:

$$\vec{\mathbf{v}}(\mathrm{t}) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\boldsymbol{r}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} \qquad (4)$$

и направлена вдоль вектора $d\vec{\boldsymbol{r}}$, т.е. по касательной к траектории.

С учетом соотношения (1) выражение для скорости принимает вид:

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{\boldsymbol{e}}_x + \frac{dy(t)}{dt}\vec{\boldsymbol{e}}_y + \frac{dz(t)}{dt}\vec{\boldsymbol{e}}_z = \mathrm{v}_x\vec{\boldsymbol{e}}_x + \mathrm{v}_y\vec{\boldsymbol{e}}_y + \mathrm{v}_z\vec{\boldsymbol{e}}_z \ , \qquad (5)$$

где величины $\mathrm{v}_x = \frac{dx(t)}{dt}$, $\mathrm{v}_y = \frac{dy(t)}{dt}$ и $\mathrm{v}_z = \frac{dz(t)}{dt}$ в декартовой СК являются проекциями вектора скорости на оси X, Y и Z, соответственно.

Расстояние d*S*, проходимое точкой за время *dt*, определяется как $dS = \mathrm{v}\, dt$, где v – <u>*модуль*</u> скорости. ***Длина пути*** *(или просто* ***путь)*** ΔS, пройденного материальной точкой с момента времени t_1 до момента t_2 выражается через интеграл от <u>модуля</u> скорости:

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{v}(t)dt \ . \tag{6}$$

Средняя путевая скорость - это отношение пути ΔS, пройденного точкой, ко времени Δt, за которое этот путь был пройден:

$$\langle \mathrm{v}(t) \rangle_{\Delta t} = \frac{\Delta S}{\Delta t} \ . \tag{7}$$

Среднее ускорение за время Δt определяется выражением

$$\langle \vec{\boldsymbol{a}}(t) \rangle_{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{\mathrm{v}}}{\Delta t} = \frac{\vec{\mathrm{v}}(t_2) - \vec{\mathrm{v}}(t_1)}{t_2 - t_1} \ . \tag{8}$$

Мгновенное линейное ***ускорение*** материальной точки в момент времени t определяется как:

$$\vec{\boldsymbol{a}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathrm{v}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} \tag{9}$$

С учетом соотношения (5) выражение для ускорения можно записать в виде:

$$\vec{\boldsymbol{a}}(t) = \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = \frac{d\mathrm{v}_x}{dt}\vec{\boldsymbol{e}}_x + \frac{d\mathrm{v}_y}{dt}\vec{\boldsymbol{e}}_y + \frac{d\mathrm{v}_z}{dt}\vec{\boldsymbol{e}}_z = a_x\vec{\boldsymbol{e}}_x + a_y\vec{\boldsymbol{e}}_y + a_z\vec{\boldsymbol{e}}_z \ , \tag{10}$$

где величины $a_x = \frac{d\mathrm{v}_x(t)}{dt}$, $a_y = \frac{d\mathrm{v}_y(t)}{dt}$ и $a_z = \frac{d\mathrm{v}_z(t)}{dt}$ в декартовой СК равны проекциям ускорения на оси X, Y и Z, соответственно.

Так как любая векторная величина может быть представлена через 3 свои координаты (см. формулы (1), (5) и (10)), то, фактически, движение точки в трехмерном пространстве может быть представлено как суперпозиция его движений вдоль трёх координатных осей. Поэтому основное внимание в данном пособии мы уделим одномерному движению, например, вдоль оси *X*.

График зависимости ускорения a_x точки от времени t

Из определения ускорения (10) следует, что по заданной зависимости $a_x(t)$ можно найти изменение проекции скорости $\Delta\mathrm{v}_x = \mathrm{v}_x - \mathrm{v}_{0x}$ за промежуток времени $\Delta t = t - t_0$:

$$\vec{\boldsymbol{a}}(t) = \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} \rightarrow a_x(t) = \frac{d\mathrm{v}_x}{dt} \rightarrow d\mathrm{v}_x = a_x(t)dt \rightarrow \int_{\mathrm{v}_{0x}}^{\mathrm{v}_x} d\mathrm{v}_x = \int_{t_0}^{t} a_x(t)dt \rightarrow$$

$$\Delta\mathrm{v}_x = \mathrm{v}_x - \mathrm{v}_{0x} = \int_{t_0}^{t} a_x(t)dt \ . \tag{11}$$

Если $a_x(t) > 0$, то в соответствии с геометрическим смыслом определенного интеграла, изменение проекции скорости $\Delta\mathrm{v}_x$ на графике $a_x(t)$ будет численно равно площади между кривой $a_x(t)$, осью времени и двумя вертикальными прямыми, проведенными через точки t_0 и t. Например, из рис. 1 следует, что между 1-й и 3-й секундами точка двигалась с постоянным ускорением $a_x(t)$=2 м/с^2. Тогда изменение проекции скорости на этом участке будет равно:

$$\Delta v_x = a_x \int_{t_0}^{t} dt = a_x(t - t_0) = a_x \Delta t \ .$$

Следовательно, с 1-й по 3-ю секунду изменение проекции скорости точки составляет 2 м/с^2×(3 с−1 с)=4 м/с и численно равно площади заштрихованного прямоугольника.

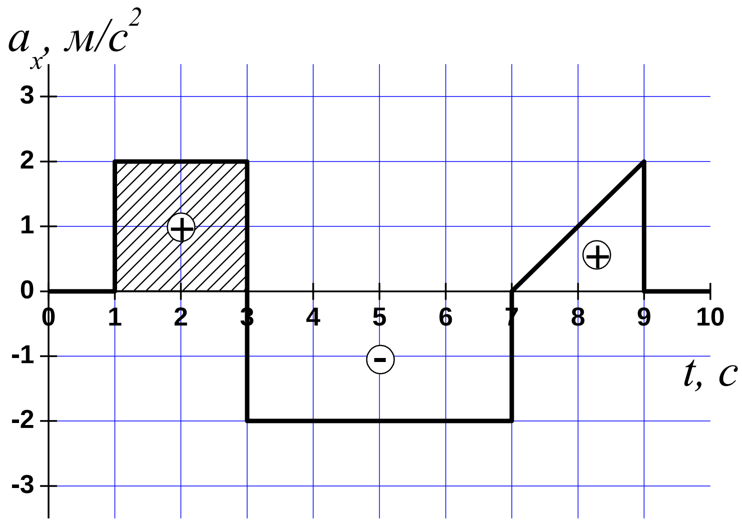

Рис. 1

Если $a_x(t) < 0$, то Δv_x равно площади под кривой $a_x(t)$, лежащей ниже оси абсцисс, *взятой со знаком минус* (Δv_x<0). Например, с 3-й по 7-ю секунду движения проекция скорости точки изменяется на Δv_x = - 8 м/с.

Если за время движения точки ускорение принимает положительные и отрицательные значения, то для нахождения изменения скорости за этот промежуток времени нужно провести алгебраическое суммирование соответствующих площадей. Например, с 1-й по 7-ю секунду движения (рис. 1) проекция скорости точки изменится на Δv_x = 4 м/с + (–8 м/с) = –4 м/с.

По графику зависимости ускорения от времени можно построить график зависимости изменения проекции скорости $\Delta v_x(t)$ как функцию времени. Например, на рис.2 представлен график $a_x(t)$ и соответствующий ему график $\Delta v_x(t)$. Для того, чтобы можно было построить график зависимости v_x от времени, необходимо знать начальное значение проекции скорости v_{0x} в момент времени t_0.

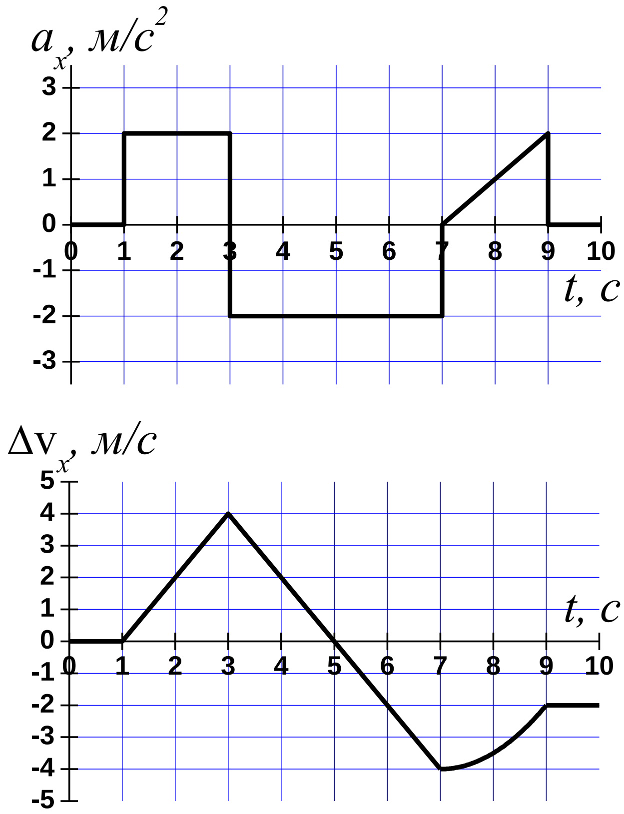

Рис. 2

Обратим внимание на то, что *знак* проекции ускорения говорит лишь о том, куда направлено ускорение: по оси X ($a_x > 0$) или против оси X ($a_x < 0$), но не позволяет сделать вывод о том, возрастает или уменьшается при этом скорость точки - для этого необходимо еще знать и направление вектора скорости. Если вектор ускорения *совпадает* по направлению с вектором скорости, то скорость точки *возрастает*. Допустим, что для движения, показанного на рис.2 , начальная скорость точки $v_{0x} = 0$. Тогда на участке с 1-й по 3-ю секунду $v_x > 0$ и $a_x > 0$, и скорость возрастает. Она также возрастает между 5-й и 7-й секундами, т.к. $v_x < 0$ и $a_x < 0$. На участке от 3-ей до 5-й секунды вектор ускорения направлен противоположно вектору скорости, при этом скорость уменьшается.

График $a_x(t)$ позволяет найти среднее значение проекции ускорения за некий промежуток времени. Из определения среднего ускорения (8) следует, что $\langle a_x(t)\rangle_{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$, а как показано выше, изменение проекции скорости Δv_x численно равно площади под графиком $a_x(t)$. Таким образом, например, для рис. 1 за первые

3 секунды движения среднее значение проекции ускорения равняется 4/3=1.33 м/с^2, а за первые 5 с оно будет равно нулю.

Задания для самостоятельной работы по графику $a_x(t)$ на рис. 1

1) Чему равно приращение проекции скорости с 1-й по 5-ю секунды? С 7-й по 9-ю секунды? С 9-й по 10-ю? За всё время движения?

2) Постройте v_x как функцию времени, если v_x = 1 м/с в момент времени t = 1 с.

3) Найдите среднее ускорение точки за следующие промежутки времени: с 1-й по 4-ю секунду; с 5-й по 10-ю секунды; за всё время движения.

4) Запишите вид функции $\Delta v_x(t)$ с 7-й по 9-ю секунду?

График зависимости v_x от времени t

С точки зрения математической записи определения скорости $\vec{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$ и ускорения $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}$ подобны. Поэтому из графика проекции скорости можно получить график изменения координаты аналогично тому, как мы получали из графика проекции ускорения изменение проекции скорости.

Из определения скорости (5) следует, что по заданной зависимости $v_x(t)$, можно найти изменение координаты (проекции перемещения) $\Delta x = x - x_0$ за промежуток времени $\Delta t = t - t_0$:

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow v_x(t) = \frac{dx}{dt} \rightarrow dx = v_x(t)dt \rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v_x(t)dt \rightarrow$$

$$\Delta x = x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v_x(t)dt \quad . \qquad (12)$$

Аналогично тому, как мы искали изменение проекции скорости Δv_x по графику $a_x(t)$, поиск изменения координаты Δx по графику $v_x(t)$ сводится к определению площади под кривой $v_x(t)$.

Например, для графика на рис. 3 за первые 2 секунды движения Δx будет равно площади заштрихованного треугольника Δx=0.5×2 с×2 м/с=2 м, а за первые 3 секунды будет равно 3 м.

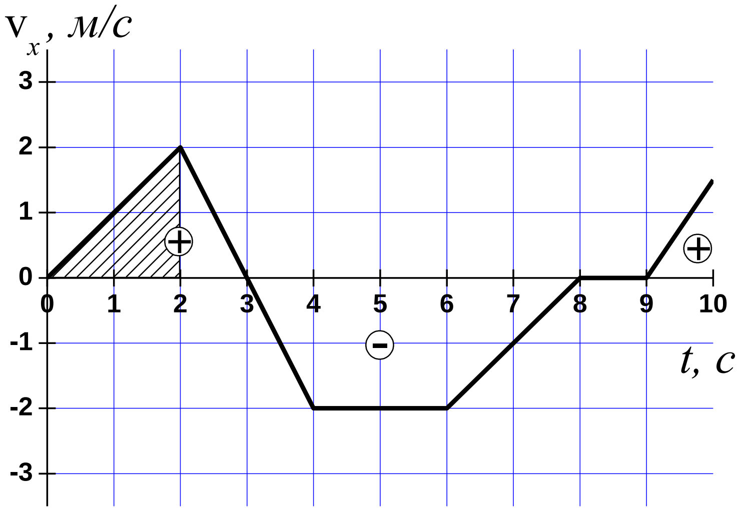

Рис. 3

Если $v_x > 0$, то площадь берется со знаком *плюс* ($\Delta x > 0$), если $v_x < 0$ - то со знаком *минус* ($\Delta x < 0$). Если за время движения проекция скорости принимает как положительные, так и отрицательные значения, то для нахождения изменения координаты за этот промежуток времени нужно провести алгебраическое суммирование соответствующих величин. Например, для графика на рис. 3 перемещение Δx за промежуток времени со 2-й по 4-ю секунды будет равно нулю.

Если Δx есть интеграл от проекции скорости (см. выражение (12)), то пройденный путь $S(t)$, согласно определению (6), есть интеграл от модуля скорости. То есть для определения пройденного пути площади под графиком $v_x(t)$ нужно всегда складывать независимо от знака проекции скорости. Например, для графика на рис. 3 за первые 3 секунды движения пройденный путь S будет совпадать с проекцией перемещения Δx и будет равен 3 м, а за промежуток времени со 2-й по 4-ю секунды пройденный путь будет равен 2 м.

По графику $v_x(t)$ можно найти среднее значение проекции скорости за некий промежуток времени. Из определения средней скорости (3) следует, что $\langle \mathrm{v}_{\boldsymbol{x}}(t)\rangle_{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{x}}{\Delta t}$, а как показано выше, перемещение Δx численно равно площади под графиком $v_x(t)$. Таким образом, например, для рис. 3 за первые 3 секунды движения среднее значение проекции скорости равняется 3 м / 3 с=1 м/с.

По графику $v_x(t)$ можно также определить проекцию ускорения $a_x(t)$. Из определения ускорения (10) следует, что ускорение есть производная от скорости по времени, то есть $a_x(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \mathrm{v_x}}{\Delta t} = \frac{d\mathrm{v_x}}{dt}$. Геометрический смысл производной есть тангенс угла наклона касательной к кривой в данной точке. Следовательно, тангенс угла наклона касательной к графику $v_x(t)$ численно равен величине проекции ускорения материальной точки в данный момент времени. В частном случае, когда график $v_x(t)$ представляет прямую линию, тангенс угла наклона этой прямой к оси времени численно равен проекции ускорения, т.е. $a_x = \frac{\mathrm{v}_{x2}-\mathrm{v}_{x1}}{t_2-t_1}$. Например, для графика на рис. 3 в первые две секунды движения проекция ускорения равнялась $a_x = \frac{(2-0)\text{м/с}}{(2-0)\text{с}} = 1\ \text{м/с}^2$, а со 2-й по 4-ю секунды $a_x = \frac{((-2)-2)\text{м/с}}{(4-2)\text{с}} = -2\ \text{м/с}^2$.

Качественно: в случае движения с положительной проекцией ускорения касательная к графику проекции скорости образует с осью времени острый угол, а если проекция ускорения отрицательна – тупой угол (принято отсчет угла проводить от оси абсцисс против часовой стрелки). Величина же ускорения (его модуль) определяется крутизной графика скорости.

Задания для самостоятельной работы по графику $v_x(t)$ на рис. 3

1) Определите Δx с 3-й по 8-ю секунду, с 8-й по 9-ю секунду, с 9-й по 10-ю, за всё время движения точки.

2) Постройте график координаты $x(t)$, если в начальный момент времени $t_0 = 0$ $x_0 = 0$.

3) Постройте график $a_x(t)$.

4) Постройте график пройденного точкой пути как функцию времени.

5) Найдите среднее значение проекции скорости точки $\langle \mathrm{v}_{\boldsymbol{x}}(t)\rangle_{\Delta t}$ за следующие промежутки времени: со 2-й по 4-ю секунду; со 2-й по 8-ю секунду; за всё время движения. Найдите среднюю путевую скорость $\langle \mathrm{v}(t)\rangle_{\Delta t}$ точки за те же промежутки времени.

6) Определите, в какой момент времени точка удалится от начального положения на максимальное расстояние?

7) Считая, что при $t_0 = 0$ $x_0 = 0$, определите, в какой момент времени координата точки снова окажется равной нулю.

8) Определите перемещение Δx и пройденный точкой путь S на участке, на котором она двигалась с максимальным по величине ускорением.

9) Определите перемещение Δx и пройденный точкой путь S на участке, на котором она двигалась с минимальным по величине ускорением.

График зависимости координаты *x* от времени *t*

В соответствии с выражением (5) $\mathrm{v}_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$. Из геометрического смысла производной следует, что проекция скорости v_x численно равна тангенсу угла наклона касательной к графику координаты $x(t)$. В частном случае, когда график $x(t)$ представляет прямую линию, тангенс угла наклона этой прямой к оси времени численно равен проекции скорости, т.е. $\mathrm{v}_x = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$. Например, для графика на рис. 4 в первые две секунды движения проекция скорости равнялась $\mathrm{v}_x = \frac{(3-0)\text{м}}{(2-0)\text{с}} = 1.5\,\text{м/с}$, а со 2-й по 4-ю секунды $\mathrm{v}_x = \frac{(0-3)\text{м}}{(4-2)\text{с}} = -1.5\,\text{м/с}$.

Если же график координаты $x(t)$ представляет кривую линию, то тогда надо провести касательную к кривой в нужный момент времени и определить тангенс угла наклона касательной. Например, для графика на рис. 4 в 9-ю секунду движения скорость равняется 4 м/с (касательная к графику в этой точке показана пунктирной линией).

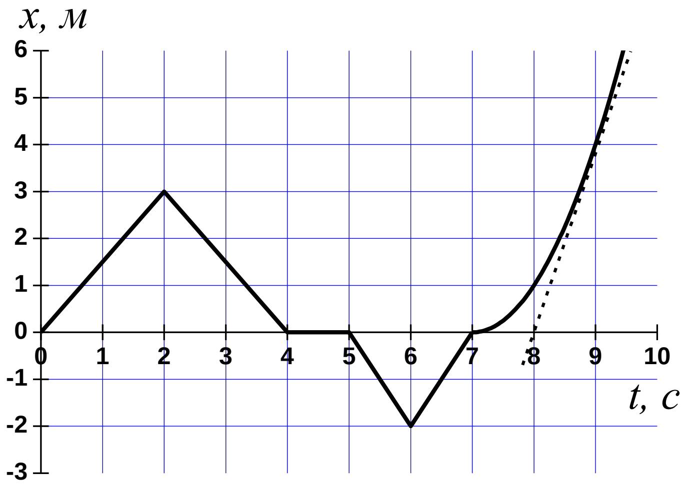

Рис. 4

По графику координаты $x(t)$ можно найти среднюю проекцию скорости за некий промежуток времени. Из определения средней скорости (3) следует, что $\langle \mathrm{v}_x(t) \rangle_{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$, что можно интерпретировать как тангенс угла наклона секущей, проходящей через точки (t_1, x_1) и (t_2, x_2). Например, для рис. 4 за первые 3 секунды движения средняя скорость равна $\langle \mathrm{v}_x \rangle_{\Delta t} = \frac{(1.5-0)\text{м}}{(3-0)c} = 0.5\,\text{м/с}$.

Задания для самостоятельной работы по графику $x(t)$ на рис. 4

1) Определите v_x точки в интервалах с 4-й по 5-ю, с 5-й по 6-ю, с 6-й по 7-ю секунды.

2) Найдите среднюю скорость движения за первые 4, 6, 9 секунд движения.

3) Чему равна средняя скорость со 2-й по 6-ю секунды движения? С 5-й по 7-ю секунду?

4) Определите скорость точки в 8-ю секунду. Зная значения скорости в 7-ю, 8-ю и 9-ю секунды, запишите закон изменения координаты точки со временем, если на этом участке зависимость $x(t)$ является параболой. Определите ускорение точки на этом участке.

5) Постройте график $v_x(t)$.

6) Постройте график пройденного точкой пути S как функцию времени.

Ответы на задания для самостоятельной работы

стр. 6 - задания по графику $a_x(t)$ на рис. 1:

1) 0 м/с; 2 м/с; 0 м/с; -2 м/с.

3) 0,67 м/с^2; -0,4 м/ с^2; -0,2 м/ с^2.

4) $\Delta \mathrm{v}_x = -4 + \frac{(x-7)^2}{2} = 20{,}5 - 7t + \frac{x^2}{2}$.

стр. 9 - задания по графику $\mathrm{v}_x(t)$ на рис. 3:

1) -7 м; 0 м; 0,75 м; 3,25 м.

5) $\langle \mathrm{v}_x(t)\rangle_{\Delta t}$ =0 м/с; -1 м/с; 0,325 м/с. $\langle \mathrm{v}(t)\rangle_{\Delta t}$ =1 м/с; 1,33 м/с;1,075 м/с.

6) 8 с.

7) 5 с.

8) Δx=0 м, S =2 м.

9) Δx=0 м, S =0 м.

стр. 11 - задания по графику $x(t)$ на рис. 4:

1) 0 м/с; -2 м/с; 2 м/с.

2) 0 м/с; -0,33 м/с; 0,44 м/с.

3) -1,25 м/с; 0 м/с.

4) $\mathrm{v}_x(t = 8\ \text{с}) = 2\ \text{м/с}$; $\Delta x(t) = (t-7)^2$; $a_x = 2\ \text{м/с}^2$.

Литература

1. Иродов И.Е. Механика. Основные законы, М., Физматлит, 2000.
2. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. Изд.10, М., Физматлит, 2008.
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. т.1. Механика. Изд.3. М., Физматлит, 2005.

Методические рекомендации

Мухамедшин Ирек Рафкатович
Фишман Александр Израилевич

АНАЛИЗ ГРАФИКОВ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ