

УДК 519.63: 532.5.032

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ В ТЕРМИНАХ ФУНКЦИЯ ТОКА–ЗАВИХРЕННОСТЬ**Е.И. КАЛИНИН, А.Б. МАЗО***Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail KalininEI@yandex.ru***SIMULATION OF THE NATURAL CONVECTION OF A VISCOUS FLUID IN A CHANNEL IN TERMS OF THE STREAM-VORTICITY FUNCTION****E.I. KALININ, A.B. MAZO***Kazan Federal University, Kazan***Summary**

В работе рассматривается нестационарная плоская задача о конвективном течении вязкой несжимаемой жидкости около нагревателя, помещенного в вертикальный канал. Для описания течения используется система уравнений Навье–Стокса и конвективной теплопроводности в приближении Буссинеска. Предложен численный алгоритм решения. Для демонстрации работы представленного алгоритма была рассмотрена задача о конвекции около одиночных изопериметрических нагревателей круговой и профилированной формы.

Ключевые слова: конвекция, вязкая несжимаемая жидкость, уравнения Навье–Стокса, МКЭ, TVD-подход.

Summary

We consider the problem of non-stationary flat convective flow of a viscous incompressible fluid near a heater placed in a vertical channel. To describe the flow we use the system of Navier–Stokes equations and convective heat conduction in the Boussinesq approximation. A numerical solution algorithm is proposed. To demonstrate the presented algorithm has been considered the problem of convection near single isoperimetric heaters and circular shaped form.

Key words: convection, viscous incompressible fluid, the Navier–Stokes equations, finite element method, TVD-approach.

Рассматривается нестационарная плоская задача о конвективном течении вязкой несжимаемой жидкости около нагревателя, помещенного в вертикальный канал (рис. 1). На поверхности нагревателя γ_1 поддерживается постоянная температура T_1 , температура жидкости вне канала равна $T_0 < T_1$. Стенки канала γ_0, γ_2 считаются теплоизолированными. В начальный момент времени жидкость покоится; течение в канале возникает только под действием выталкивающих сил, которые появляются из-за понижения плотности нагреваемой жидкости.

1. Постановка задачи

Для описания течения используется система уравнений Навье–Стокса и конвективной теплопроводности в терминах завихренность ω – функция тока ψ – температура T в приближении Буссинеска [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \omega &= \frac{1}{\text{Re}} \Delta \omega - \frac{\partial T}{\partial y}, \\ -\Delta \psi &= \omega, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T &= \frac{1}{\text{Pe}} \Delta T, \end{aligned} \tag{1}$$

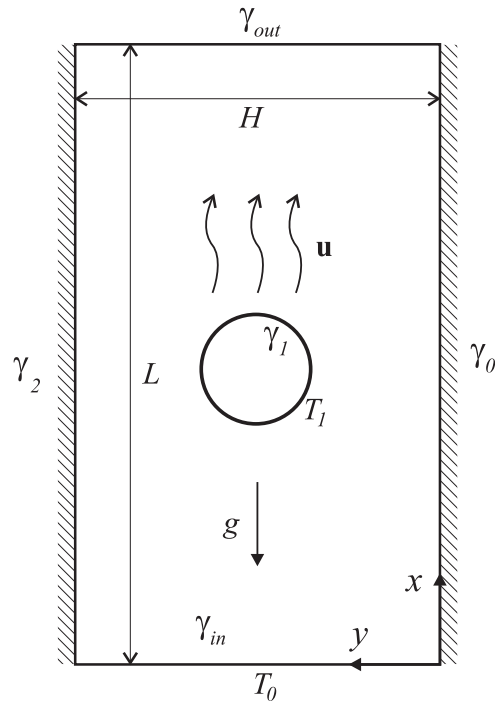


Рис. 1: Схема термоконвективного течения в вертикальном канале

где преобразованные переменные определены через скорость течения жидкости $\vec{u} = (u, v)$

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

При записи определяющей системы использованы относительные переменные, полученные в результате обезразмеривания по характерной длине D , характерной скорости естественной конвекции $u_0 = \sqrt{gD\beta(T_1 - T_0)}$ и характерной температуре $T_1 - T_0$. Безразмерные комплексы Рейнольдса Re и Пекле Pe определены как

$$Re = \frac{u_0 D}{\nu}, \quad Pe = \frac{u_0 D}{a}.$$

Здесь g — ускорение свободного падения, β — коэффициент теплового объемного расширения жидкости, a — температуропроводность, ν — коэффициент кинематической вязкости.

На границе нагревателя γ_1 , а также на стенках канала γ_0, γ_2 задаются условия прилипания

$$\begin{aligned} (x, y) \in \gamma_1 : \quad \psi &= C_1(t), \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \\ (x, y) \in \gamma_0 : \quad \psi &= C_0(t), \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \\ (x, y) \in \gamma_2 : \quad \psi &= 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

в которых расход жидкости $C_0(t)$ и значение функции тока $C_1(t)$ на контуре γ_1 подлежат определению. Граничные условия для T

$$\begin{aligned} (x, y) \in \gamma_1 : \quad T &= 1, \\ (x, y) \in \gamma_0, \gamma_2 : \quad \frac{\partial T}{\partial n} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

моделируют постоянную температуру нагревателя и теплоизоляцию стенок. Во входном γ_{in} и выходном γ_{out} сечениях канала используются мягкие граничные условия

$$(x, y) \in \gamma_{in}, \gamma_{out} : \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial n} = 0.$$

Для определения расхода жидкости $C_0(t)$, а также функции $C_1(t)$ постановка задачи дополняется двумя интегральными условиями Пирсона, полученными в результате интегрирования уравнения движения по границам γ_0, γ_1 [2]:

$$\int_{\gamma_1} \frac{\partial \omega}{\partial n} ds = 0, \quad \int_{\gamma_0} \frac{\partial \omega}{\partial n} ds = -\text{Re} \int_{\gamma_0} T ds. \quad (4)$$

2. Алгоритм решения

Дискретизация по времени задачи (1) осуществлялась по линеаризованной двухслойной схеме с шагом τ

$$\frac{T - \check{T}}{\tau} - \frac{1}{\text{Pe}} \Delta T = -\check{\mathbf{u}} \cdot \nabla \check{T}, \quad (5)$$

$$\frac{\omega - \check{\omega}}{\tau} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \omega = -\check{\mathbf{u}} \cdot \nabla \check{\omega} - \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (6)$$

$$-\Delta \psi = \omega. \quad (7)$$

На каждом временном слое сначала в результате решения уравнения (5) с краевыми условиями (3) определялось поле T , которое затем использовалось для вычисления правой части (6). Уравнения (6), (7) с граничными условиями (2) при учете интегральных соотношений (4) на каждом временном слое решались с помощью итерационного алгоритма. На k -ом итерационном шаге этого алгоритма сначала в результате решения уравнения Пуассона (7) с граничными условиями первого рода из (2) определялась функция тока ψ^k

$$-\Delta \psi^k = \omega^{k-1}, \quad (x, y) \in \gamma_i : \psi^k = C_i, \quad i = 0, 1, \quad (8)$$

которое затем использовалось для вычисления граничных значений завихренности ω_b на жестких стенках с учетом условий второго рода из (2)

$$(x, y) \in \gamma_i : \omega_b^k = -\Delta \psi^k, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \quad i = 0, 1, 2. \quad (9)$$

Далее в результате решения уравнения переноса завихренности (6) определялось поле ω^k :

$$\left(E - \frac{\tau}{\text{Re}} \Delta\right) \omega^k = R_\omega, \quad (x, y) \in \gamma_i : \omega^k = \omega_i^k, \quad i = 0, 1, 2, \quad (10)$$

где E — единичный оператор, а R_ω — часть уравнения (6), определенная до начала итерационного процесса. Выход из итерационного процесса осуществляется по условию

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial n} \right| < \varepsilon = 10^{-6}.$$

Для учета нелокальных условий (4) функции $\psi^k, \omega_b^k, \omega^k$ искались в виде

$$\psi^k = \psi_* + \psi_0 C_0 + \psi_1 C_1, \quad \omega_b^k = \omega_{b*} + \omega_{b0} C_0 + \omega_{b1} C_1, \quad \omega^k = \omega_* + \omega_0 C_0 + \omega_1 C_1. \quad (11)$$

Задачи для вспомогательных функций $\psi_{*,i}$, $\omega_{*,i}$, $\omega_{b*,i}$, не содержащие неизвестных C_i , формулировались в результате подстановки (11) в выражения (8) – (10) и приравнянии слагаемых при сходных C_i . После определения вспомогательных функций константы C_i определялись из системы, полученной после подстановки разложения (11) в условия (4):

$$\begin{cases} I_{00}C_0 + I_{01}C_1 = I_{0*} - \operatorname{Re} \int_{\gamma_0} T ds, \\ I_{10}C_0 + I_{11}C_1 = I_{1*}, \end{cases} \quad I_{i(j,*)} = \int_{\gamma_i} \frac{\partial \omega_{j,*}}{\partial n}. \quad (12)$$

Отметим, что только задачи для ψ_* , ω_{b*} , ω_* зависят от текущего временного слоя и итерационного шага. Остальные задачи стационарны, поэтому поля $\psi_{0,1}$, $\omega_{b0,1}$, $\omega_{0,1}$ (и соответствующие им интегралы в системе (12)) могут быть определены до начала расчета временных слоев на этапе инициализации задачи.

Пространственная аппроксимация дифференциальных уравнений осуществлялась методом конечных элементов с применением TVD-подхода для сборки конвективных слагаемых [3]. Для расчетов использовались неструктурированные четырехугольные сетки билинейных элементов размерности $N \approx 30000$ со сгущением около жестких стенок.

3. Результаты моделирования

Для демонстрации работы представленного алгоритма была рассмотрена задача о конвекции около одиночных изопериметрических нагревателей круговой (с диаметром D) и профилированной (NASA 0040) формы при $\operatorname{Pr} = 0.72$, $10^3 < \operatorname{Gr} < 10^5$ (числа Прандтля и Грасгофа определены как $\operatorname{Pr} = \operatorname{Pe}/\operatorname{Re}$, $\operatorname{Gr} = \operatorname{Re}^2$). Нагреватели расположены в канале длины $60D$ ширины $5D$ на расстоянии $15D$ от входного сечения.

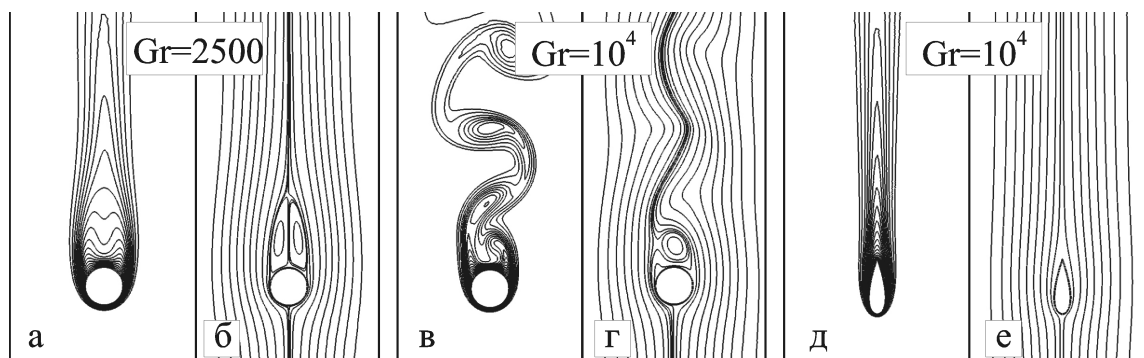


Рис. 2: Изотермы (а, в, д) и линии тока (б, г, е) конвективного течения

Для кругового нагревателя в зависимости от числа Gr наблюдается стационарное ($\operatorname{Gr} < \operatorname{Gr}^* \approx 3 \cdot 10^3$) либо периодическое ($\operatorname{Gr} > \operatorname{Gr}^*$) течение. Изотермы и линии тока установившегося стационарного обтекания при $\operatorname{Gr} = 2500$ представлены на рис. 2а,б. Получаемое при $\operatorname{Gr} > \operatorname{Gr}^*$ периодическое течение характеризуется периодическим срывом вихрей с цилиндра и формированием вихревой дорожки Кармана в следе (рис. 2в, г). Для профилированного нагревателя в указанном диапазоне параметров течение стационарно (рис. 2д, е).

На рис. 3 показано установление интегрального числа Нуссельта Nu

$$\operatorname{Nu} = \int_{\gamma_0} \frac{\partial T}{\partial n} ds$$

для $\operatorname{Gr} = 2500$ и $\operatorname{Gr} = 10^4$. Видно, что для установившегося течения при $\operatorname{Gr} = 2500$ теплоотдача профилированного нагревателя превышает теплоотдачу кругового. Этот эффект объясняется двумя факторами: во-первых, круговой цилиндр создает большее сопротивление потоку и сильнее препятствует росту расхода в канале, что в свою очередь ведет к меньшей интенсивности конвективного теплообмена; во-вторых,

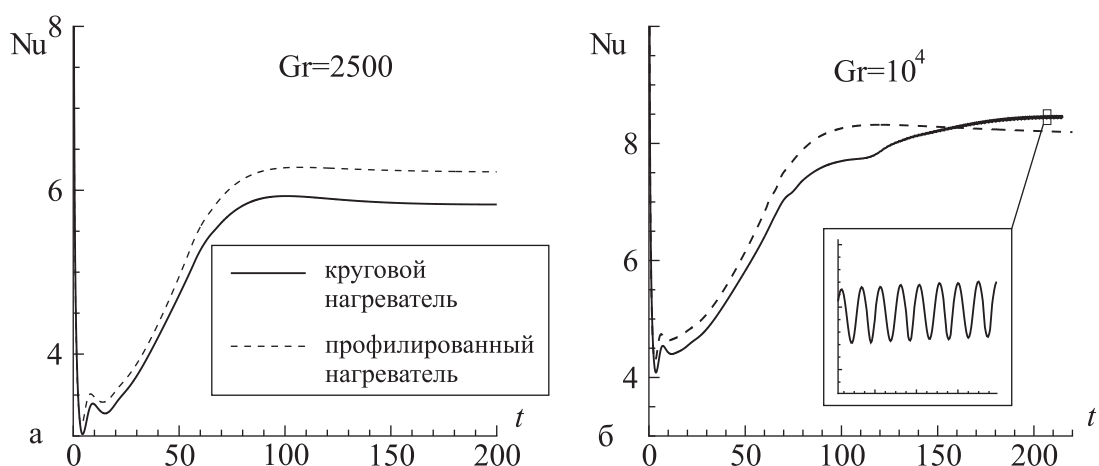


Рис. 3: Установление во времени числа Нуссельта при конвекции около одиночных нагревателей при $Gr = 2500$, $Gr = 10^4$

стационарный режим обтекания кругового цилиндра характеризуется наличием застойной вихревой зоны в хвостовой части цилиндра, где теплообмен особенно затруднен. В случае же $Gr = 10^4$ формирование вихревой дорожки в следе за круговым нагревателем в момент $t \approx 130$ значительно повышает интенсивность теплообмена. Большее количество подведенного в жидкость тепла, в свою очередь, повышает и суммарный расход жидкости в канале. В этом случае значения Nu для кругового нагревателя превышают соответствующие значения для профиля.

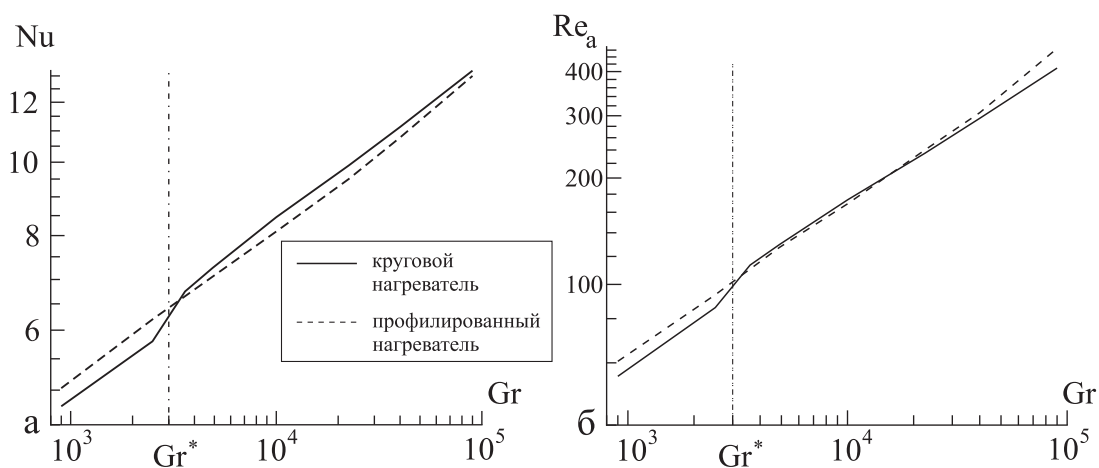


Рис. 4: Интегральное число Nu и местное число Рейнольдса Re_a в зависимости от Gr

На рис. 4 представлена зависимость числа Nu и местного числа Рейнольдса Re_a от Gr . Сравнение значений для кругового и профилированного нагревателей показывает, что в указанном диапазоне параметров при $Gr > Gr^*$ теплообмен с кругового нагревателя оказывается более интенсивным. Скорость течения жидкости в канале с круговым нагревателем превышает скорость конвекции около профилированного нагревателя в диапазоне $Gr^* < Gr < 1.5 \cdot 10^4$. Таким образом, при $Gr > 1.5 \cdot 10^4$ в случае профилированного нагревателя на течение с большей скоростью тратится меньше тепловой энергии.

Список литературы

1. **Мазо А. Б.** Численное моделирование свободной конвекции вязкой жидкости в канале с нагретым цилиндром // Ученые записки Казанского ун-та. Серия физ.-мат. науки. – 2005. – Т. 147, кн. 3. – С. 141–147.
2. **Glowinski R.** Finite element methods for incompressible viscous flow. Handbook of numerical analysis. V. 9. Numerical Methods for Fluids. – Amsterdam: North-Holland, 2003. – 1176 p.
3. **Kuzmin D., Turek S.** High-resolution FEM-TVD schemes based on a fully multidimensional flux limiter // J. of Comp. Physics. – 2004. – V. 198. – P. 131–158.