

УДК 519.63+532.546

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ РАЗРАБОТКИ НЕФТЯНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ

А.Б. Мазо, К.А. Поташев, Е.И. Калинин

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ООО «Дельта Ойл Проект»

E-mail: KPotashev@mail.ru

## SOLVING OF FILTRATION PROBLEM WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS IN THE SIMULATION OF OIL FIELD DEVELOPMENT

A.B. MAZO, K.A. POTASHEV, E.I. KALININ

Kazan Federal University, «Delta Oil Project» Ltd., Kazan

### Summary

Излагаются теоретические основы построения и опыт практического использования трехмерной суперэлементной фильтрационной модели разработки нефтяных месторождений, позволяющей в сотни раз ускорить получение результатов по сравнению с полномасштабными моделями без значительной потери точности

Ключевые слова: фильтрация двухфазного флюида, Суперэлемент, нефтяное месторождение, численный эксперимент

**Ключевые слова:** седловые задачи, регуляризованные седловые задачи, задачи оптимального управления, ограничения, итерационные методы.

### Summary

We present the theoretical foundations for the construction and experience of practical use of three-dimensional superelement filtration model of oilfield development, allowing hundreds of times accelerate results compared with full-scale models without significant loss of accuracy

**Key words:** two-phase fluid filtration, SuperElement, oil field, numerical experiment.

---

### Введение

При моделировании разработки нефтяного месторождения необходим корректный учет притока жидкости к скважине. Особое значение это имеет для горизонтальных скважин и боковых стволов, протяженность которых может достигать нескольких сотен метров, а также для скважин после проведения гидравлического разрыва пласта (ГРП), многократно увеличивающего фильтрационную поверхность скважины, что оказывает существенное влияние на распределение давления и фильтрационных потоков в прискважинной зоне пласта. В суперэлементной фильтрационной модели [1] обе задачи решаются с использованием нелокальных граничных условий.

Суперэлементная модель предназначена для оперативного расчета средних полей давления  $p$  и водонасыщенности  $s$  нефтяной залежи и использует расчетные сетки с размером ячеек (суперэлементов) порядка сотен метров, что позволяет принципиально ускорить расчет. При этом достаточная точность численного решения обеспечивается учетом симметрии течения в окрестности скважин и особенностей движения фронтов насыщенности.

В ходе решения в каждый момент времени  $t$  для каждого суперэлемента отыскиваются средние по его объему давление и водонасыщенность. Поскольку распределение притока жидкости к перфорированным участкам скважины или к трещине от ГРП не могут быть описаны в суперэлементном масштабе, то решаются вспомогательные задачи на вложенных детальных расчетных сетках.

#### 1. Задача о распределении дебита вдоль ствола скважины

Задача сводится к определению средних давлений, учитывающих долю дебита, приходящуюся на участок ствола скважины в суперэлементе.

Пусть на момент времени  $t$  следует пересчитать распределение дебита  $q$  вдоль скважины  $\gamma$ . Пусть скважина  $\gamma$  моделируется в режиме заданного на ней забойного давления  $p_\gamma$ . Отыскивается величина дебита  $q^p$ . Внутри расчетной области  $D$  суперэлементной модели строится полностью содержащий скважину  $\gamma$  контейнер  $D_\gamma$  с внешней границей  $\Gamma_\gamma$ . Область  $D_\gamma$  покрывается мелкой сеткой конечных объемов, отражающей радиальный характер течения в окрестности скважины (рис. 1). Отметим, что радиус  $R$  контейнера  $D_\gamma$  приблизительно равен 10 м, что на порядок меньше типичного размера суперэлемента. Для распределения давления  $p$  внутри контейнера формулируется задача Дирихле

$$\nabla U = 0, \quad U = -\sigma(s)k(x, y, z)\nabla p, \quad p|_{\Gamma_\gamma} = p_\Gamma, \quad p|_\gamma = p_\gamma, \quad (1)$$

в которой  $p_\gamma$  задано, а  $p_\Gamma$  отыскиваются интерполяцией среднего давления  $\bar{p}$  из внешнего суперэлементного решения. Распределение абсолютной проницаемости  $k(x, y, z)$  в  $D_\gamma$  строится по данным детальной геологической модели; функция гидропроводности  $\sigma(s)$  рассчитывается по средним значениям насыщенности  $\bar{s}$  в суперэлементах, пересекающихся с контейнером  $D_\gamma$ .

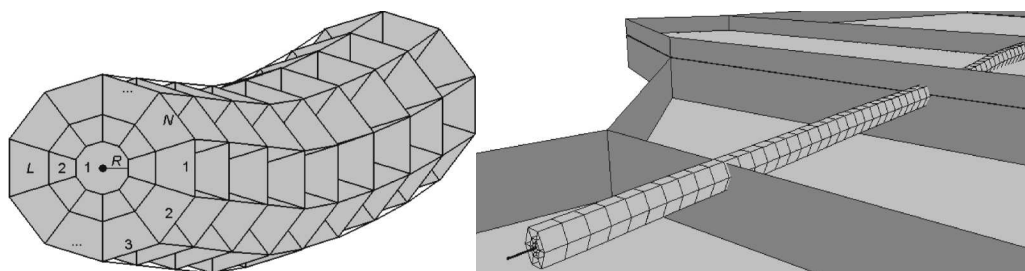


Рис. 1: Схема построения мелкой сетки конечных объемов вдоль ствола наклонной скважины и ее расположение в суперэлементах

Задача (1) решается численно. Часть  $q_i^p$  дебита, приходящаяся на каждый суперэлемент в пределах контейнера, рассчитывается по найденному распределению давления интегрированием по соответствующему участку  $\gamma_i$  ствола скважины  $\gamma$

$$q_i^p = \int_{\gamma_i} U_n d\gamma = - \int_{\gamma_i} \sigma k \frac{\partial p}{\partial n} d\gamma. \quad (2)$$

Конечно-объемная аппроксимация выражения (2) учитывает логарифмическую особенность решения в окрестности скважины и ее радиус.

Если скважина моделируется в режиме заданного дебита  $q_\gamma$  и ее перфорированный участок полностью содержится в суперэлементе, то  $q^a = q_\gamma$ . Если же суперэлемент содержит лишь часть перфорированного участка скважины, то, как и для  $q^p$ , необходимо определить долю  $q_\gamma^a$  дебита, приходящуюся на данный интервал. Для этого решается вспомогательная задача [2]

$$\nabla \cdot (\sigma k \nabla p) = 0, \quad p|_{\Gamma_\gamma} = p_\Gamma, \quad - \int_{\gamma} \sigma \frac{\partial p}{\partial n} d\gamma = q_\gamma, \quad (3)$$

в которой  $p_\gamma$  – неизвестная константа. Решение задачи (3) с нелокальным граничным условием ищется в виде

$$p = p_1 + p_\gamma p_2. \quad (4)$$

Для функций  $p_1$  и  $p_2$  формулируются краевые задачи

$$\left\{ -\nabla(\sigma k \nabla p_1) = 0, p_1|_\Gamma = p_\Gamma, p_1|_\gamma = 0 \right\}, \left\{ -\nabla(\sigma k \nabla p_2) = 0, p_2|_\Gamma = 0, p_2|_\gamma = 1 \right\},$$

не содержащие  $p_\gamma$ . Эти задачи решаются численно аналогично задаче (1) для  $q^p$ .

Неизвестная константа  $p_\gamma$  определяется из нелокального условия (3) как

$$p_\gamma = \frac{q_\gamma - I_1}{I_2}, \quad I_i = \int_{\gamma} U_{ni} d\gamma, \quad U_{ni} = -\sigma k \frac{\partial p_i}{\partial n}, \quad i = 1, 2.$$

Распределение давления в контейнере строится по формуле (4). Распределение дебита по суперэлементам в пределах контейнера определяется согласно (2).

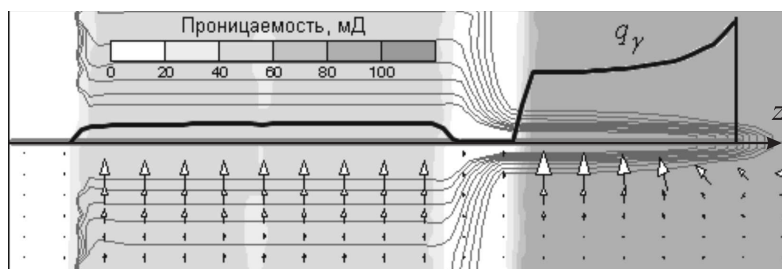


Рис. 2: Изобары и направление течения жидкости в продольном срезе прискважинной зоны пласта и распределение дебита  $q_\gamma$  вдоль ствола вертикальной скважины. Фоном показано распределение абсолютной проницаемости.

Пример расчета приведен на рис. 2. Видно, что распределение дебита вдоль ствола скважины соответствует проницаемости вскрытых слоев коллектора и характеру притока к различным участкам скважины. Проведенные исследования показали, что данная схема численного решения обладает сходимостью относительно измельчения расчетной сетки. В частности, при шести и более секторах в поперечном сечении сетки погрешность решения составляет менее 2%. Представленная методика без изменений применима и к вертикальным, и к наклонным скважинам.

## 2. Задача о притоке жидкости к трещине гидроразрыва пласта

Рассматривается задача о притоке флюида к несовершенной по вскрытию вертикальной скважине с вертикальной трещиной интервального гидравлического разрыва пласта. Трещина представлена вертикальной пластиной конечных размеров, проходящей через ось скважины. Расчетная область  $D$  представляет собой вертикальный цилиндрический контейнер с боковой границей  $\Gamma$ , содержащий скважину радиуса  $r_w$ , с трещиной  $D_f$  длиной  $2L$ , высотой  $H$  и шириной  $2\delta$ . Ортогональная система координат  $\xi, \eta, z$  вводится таким образом, чтобы направление оси  $\xi$  совпадало с направлением трещины, а ось  $z$  проходила через центр скважины (рис. 3).

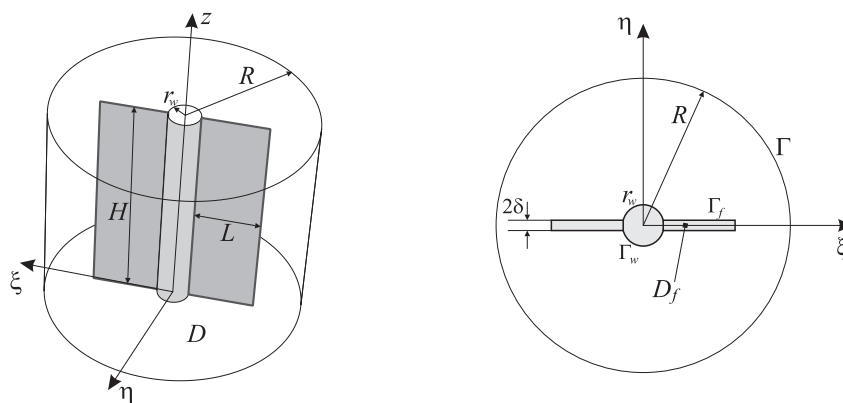


Рис. 3: Расчетная область

Краевая задача для давления во внешней области  $D$  и трещине  $D_f$  имеет вид

$$\nabla \cdot (\sigma k \nabla p) = 0; \quad \Gamma : p = p_\Gamma; \quad \Gamma_w : p = p_w, \quad z = 0, H : \frac{\partial p}{\partial n} = 0; \quad (5)$$

здесь  $p_\Gamma$  — давление на боковой границе  $\Gamma$  расчетной области  $D$ ,  $p_w$  — забойное давление в скважине  $\Gamma_w$ . Если вместо забойного давления задан суммарный дебит жидкости  $q$  из скважины  $\Gamma_w$  и трещины  $\Gamma_f$ ,

то постановка задачи дополняется нелокальным интегральным условием:

$$q = - \int_{\Gamma_w} \sigma k \frac{\partial p}{\partial n} d\gamma - \int_{\Gamma_f} \sigma k \frac{\partial p}{\partial n} d\gamma. \quad (6)$$

Задача о течении внутри трещины рассматривается отдельно. Ширина трещины мала, поэтому вместо давления  $p$  в трещине определяется среднее по сечению трещины давление  $\langle p \rangle$ , заданное как

$$\langle p \rangle = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} p d\eta. \quad (7)$$

Подставляя (7) в исходную задачу (5), получим соотношение для определения среднего давления в трещине:

$$2\delta\sigma k_f \left[ \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial \xi} + \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial z} \right] + \sigma k \frac{\partial p}{\partial \eta} \Big|_{-\delta}^{\delta} = 0, \quad \xi = r_w : \langle p \rangle = p_w, \quad \xi = L : \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial \eta} = 0, \quad (8)$$

где  $k_f$  — проницаемость трещины, которую будем считать постоянной. Второе слагаемое в соотношении (8) определяется решением внешней задачи (5), которая в свою очередь зависит от решения задачи в трещине через условие первого рода

$$\Gamma_f : p = \langle p \rangle. \quad (9)$$

Чтобы исключить из постановки неизвестное забойное давление  $p_w$ , функции  $p$  и  $\langle p \rangle$  записываются в виде линейных комбинаций от вспомогательных функций  $p_1, p_2$ :

$$p = p_1 + p_2 p_w; \quad \langle p \rangle = \langle p_1 \rangle + \langle p_2 \rangle p_w. \quad (10)$$

Для формулировки задач для функций  $p_1, p_2$  сначала представления (10) подставляется в задачи (5), (8), (9), а затем из полученных соотношений отдельно выписываются равенства свободных членов и членов при  $p_w$ . Граничные условия первого рода для  $p_1, p_2$ , полученные из (8), (9) по описанной процедуре, не содержат забойного давления и имеют вид

$$\Gamma : p_1 = p_\Gamma, p_2 = 0; \quad \Gamma_w : p_1 = 0, p_2 = 1; \quad \Gamma_f : p_1 = \langle p_1 \rangle, p_2 = \langle p_2 \rangle$$

$$\xi = r_w : \langle p_1 \rangle = 0, \langle p_2 \rangle = 1.$$

Для определения забойного давления по найденным  $p_1$  и  $p_2$  используется соотношение (6), записанное с учетом представления (10)

$$p_w = - \left[ q - \int_{\Gamma_w} k\sigma \frac{\partial p_1}{\partial n} d\gamma - \int_{\Gamma_f} k\sigma \frac{\partial p_1}{\partial n} d\gamma \right] / \left[ \int_{\Gamma_w} k\sigma \frac{\partial p_2}{\partial n} d\gamma + \int_{\Gamma_f} k\sigma \frac{\partial p_2}{\partial n} d\gamma \right]. \quad (11)$$

При обезразмеривании задачи по линейному размеру  $L$  и пластовой проницаемости  $k_0$ , решение задачи определяется безразмерным комплексом  $M = 2\delta k_f / k_0 L$ . На рис. 4 представлено решение модельной задачи при  $\sigma = 1, k/k_0 = 1, p_\Gamma = 1, R/L = 10, r_w/L = 0.01, H/L = 1, M = 10$  с заданным дебитом  $q = 1$ . Решение внешней задачи и задачи в трещине согласовывалось итерационно. Аппроксимация дифференциальных уравнений осуществлялась методом конечных объемов на регулярной сетке со сгущением вблизи скважины. Распределение давления в поперечном направлении к трещине ГРП близко к логарифмическому, тогда как вдоль трещины оно имеет характерную особенность в виде точки излома при переходе в ненарушенный пласт, что вполне согласуется с теоретическими результатами [3, 4].

### Заключение

Расчет распределения дебитов вдоль произвольно ориентированных стволов в рамках суперэлементной фильтрационной модели позволяет оперативно прогнозировать эффективность бурения боковых стволов и горизонтальных скважин, а также учитывать неравномерность выработки запасов по слоям пласта. Моделирование гидроразрыва дает возможность прогноза величины его технологической эффективности для подбора наиболее перспективных скважин-кандидатов для обработок.

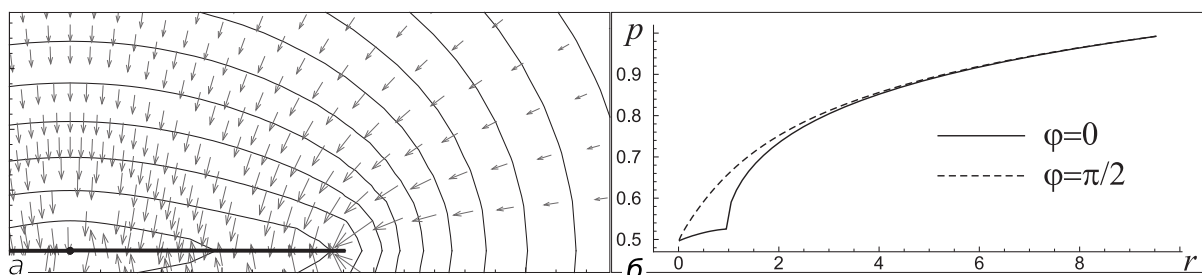


Рис. 4: Изобары и направление течения жидкости (а), распределение давления по радиусу вдоль ( $\varphi = 0$ ) и поперек ( $\varphi = \pi/2$ ) трещины при фильтрации с  $M = 10$

### Список литературы

1. **Мазо А.Б., Булыгин Д.В.** Суперэлементы. Новый подход к моделированию разработки нефтяных месторождений//Нефть. Газ. Новации. – 2011. – №. 11. – С. 6–8.
2. **Мазо А.Б., Поташев К.А., Булыгин Д.В.** Суперэлементы. Моделирование горизонтальных скважин и боковых стволов//Нефть. Газ. Новации. – 2012. – №. 4. – С. 48–50.
3. **Каневская Р.Д.** Математическое моделирование разработки месторождений нефти и газа с применением гидравлического разрыва пласта. – М.: ООО «Недра-Бизнесцентр», 1999. – 212 с.
4. **Бадертдинова Е.Р., Салимьянов И.Т.** Численное решение обратной задачи фильтрации в пласте, содержащем трещину гидроразрыва// Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы Восьмой Всероссийской конференции, посвященной 80-летию со дня рождения А.Д. Ляшко. – Казань: Казанский университет, 2010. – С. 105–109.