Б.Л.ЛАПТЕВ

НИКОЛАЙ ИВАНОВИЧ ЛОБАЧЕВСКИЙ

1792 – 1856

Борис Лукич Лаптев
НИКОЛАЙ ИВАНОВИЧ ЛОБАЧЕВСКИЙ
К 150-летию геометрии Лобачевского. 1826–1976
Редактор *Е. А. Кириллович.*
Теки. редактор *Г. П. Кузьмина*
Сдано в набор 22/Х1-75 г. Подписано к печати 23/IV-76 г. ПФ 07071. Формат бумаги 84Х108'/з2. Печ. л. 4,25 (7,14). Уч.-изд. л. 7,2. Тираж 17000 экз. Заказ Л-1162. Цена 60 коп.

Монография посвящена жизни и трудам гениального ученого и мыслителя Н.И.Лобачевского (1792 – 1856), создателя неевклидовой геометрии, 150-летие которой исполняется в 1976 г. В работе изложена история проблемы параллелей, основные факты новой геометрии, ее влияние на развитие математики, ее место в современной науке.
Автор убедительно показывает, что вся жизнь ученого была отдана борьбе за научную истину и развитие народного образования. В книге рассказывается также о многосторонней деятельности Лобачевского по руководству Казанским университетом.
Монография рассчитана на широкий круг читателей.

УДК
ББК
Л

Печатается по решению
Комиссии по издательской деятельности
Казанского университета

Научный редактор профессор **А.П.Широков**

Составитель профессор ***Б.Н.Шапуков***

Лаптев Б.Л.
Николай Иванович Лобачевский, 1792 – 1856. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2001. – 76 с.
ISBN 5-7464-

Борис Лукич Лаптев (1905 – 1989), профессор Казанского государственного университета, был одним из крупнейших исследователей жизни и научного наследия Н.И.Лобачевского, посвятив этой теме много своих работ. Эта книга была написана к 150-летию со дня открытия неевклидовой геометрии и опубликована Издательством Казанского университета в 1976 г. Она рассчитана на широкий круг читателей, не обладающих специальной математической подготовкой. Впрочем, диапазон деятельности Н.И.Лобачевского был настолько широк, что итоги его не только научной, но и ректорской, педагогической и общественной работы безусловно представляют интерес для любого человека.

В книге достаточно широко представлены все стороны деятельности Н.И.Лобачевского, поэтому в связи с наступающим 200-летием Казанского университета было решено переиздать ее, сделав лишь незначительные сокращения за счет математического материала. Кроме того, мы сочли необходимым сделать некоторые подстрочные примечания, учитывая, что со времени первого издания прошло около 30 лет. Пополнен и список литературы.

ОТ АВТОРА

Глубоко проникнув в самые истоки учения о пространстве, Н.И.Лобачевский создал новую геометрию, получившую впоследствии его имя. Это был смелый шаг в неизведанную еще область: идеи Лобачевского противоречили привычному пространственному опыту. Седьмого февраля 1826 г. он представил в физико-математическое отделение Казанского университета свое сочинение “Exposition succincte de Principes de Gйomйtrie...” (“Сжатое изложение начал геометрии...”), 11 февраля были назначены рецензенты, а 12 февраля он читал свое рассуждение в заседании Отделения*.

Таким образом, в феврале 1976 г. исполняется 150 лет создания первой неевклидовой геометрии, и эта дата будет широко отмечаться научной общественностью**.

Н.И.Лобачевского справедливо сравнивали с Колумбом – открывателем новых земель и с Коперником, преобразовавшим взгляды его современников на Вселенную, лишившим Землю ее привилегированного неподвижного положения в центре мира.

Существует обширная литература, посвященная жизни, деятельности и научным трудам гениального русского ученого. Прежде всего имеется ряд специальных работ, в которых исследуются отдельные периоды его жизни, различные стороны его деятельности, его материалистическое мировоззрение, распространение и развитие его идей. Лобачевскому и его трудам посвящены также отдельные главы в больших исторических исследованиях [19, 47], статьи в энциклопедиях и сборниках биографий великих ученых, вводные статьи и комментарии к отдельным его сочинениям (см. [1, т. 1– 5] и [2, 3, 6]). Немало издано и прекрасных научно-популярных книг различной степени сложности ([45, 43, 31, 15, 9, 10, 20, Приложение в 44] и др.).

Настоящая книга стремится ввести читателя, не имеющего специальной подготовки, в круг идей неевклидовой геометрии Лобачевского, познакомить с основными моментами биографии ученого, с его длившейся до конца жизни борьбой за утверждение научной истины, со значением открытия Лобачевского для дальнейшего развития физико-математических наук.

При ее составлении частично использованы материалы, вошедшие в нашу книгу для внеклассного чтения “Лобачевский и его геометрия” (М.: Просвещение, 1976).

ДЕТСТВО. ГИМНАЗИЯ И УНИВЕРСИТЕТ. НАЧАЛО ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ И НАУЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Николай Иванович Лобачевский родился 20 ноября (1 декабря) 1792 г.[1] в Нижнем Новгороде в семье мелкого чиновника–губернского регистратора межевой конторы Ивана Максимовича Лобачевского[2]. Дед Н.И.Лобачевского до 1775 г. служил “в певческой должности” у князя М.Долгорукого, а бабка была крепостной этого помещика. И.М.Лобачевский был принят на службу в 1777 г., в Нижегородскую межевую контору – в 1787 г. и через два года “за болезнию уволился”. Тогда же (или в 1790 г.) он женился на Прасковье Александровне (ее девичью фамилию установить не удалось) и через семь лет вновь поступил в контору, которая вскоре была расформирована, а чиновники переведены в Уфу. В январе 1800 г. по его заявлению он был вновь “за болезнию” уволен и приехал в Нижний Новгород. Дальнейшая его судьба неизвестна.

У Н.И.Лобачевского было два брата. Старший, Александр, родился в 1791 г., а младший, Алексей – в 1795 г. В церковных записях за 1799 г. все три мальчика названы воспитанниками “умершего капитана Сергея Шебаршина”. С.С.Шебаршин был титулярным советником, землемером упомянутой конторы и был вдов, скончался 15 октября 1797 г. По-видимому, он был родственником П.А.Лобачевской и помогал ей воспитывать детей[3].

В 1802 г. она привезла всех трех сыновей в Казань, чтобы отдать их в ученье. В те годы из всех городов Поволжья и Сибири только одна Казань имела гимназию. П.А.Лобачевская подала 5 ноября прошение о приеме ее сыновей в гимназию *“...на собственное содержание до открытия вакансии на казенное...”* (Николая перевели на казенное содержание только в сентябре 1803 г.)[4]. Николай был принят в начальный класс и, хотя долго болел, был по окончании года переведен в следующий (нижний) класс и награжден книгами. Его учителя, Ф.П.Краснов, а затем А.И.Васильев, отмечали, что он “прилежен и хорош”. В последних двух высших математических классах его учили Н.М.Ибрагимов и Г.И.Корташевский (последний преподавал одновременно и в университете).

У Ибрагимова Лобачевский обучался в высшем арифметическом классе с осени 1804 г. по январь 1805 г. Затем он посещал полгода геометрический класс Корташевского (с февраля 1805 г. до летнего периода была пройдена алгебра). Далее геометрический класс был передан Ибрагимову, который преподавал тогда также русский язык, литературу и латинский язык. Несомненно, что за два с половиной года он мог оказать большое влияние на круг интересов юного Лобачевского. Ибрагимов всегда считал его одним из лучших учеников.

Лобачевский еще не окончил казанскую гимназию[5], когда в здании, в котором она размещалась, был открыт университет. Это был четвертый университет в России (уже существовали – Московский, Дерптский и Виленский). Вскоре был открыт Харьковский университет. Указ об открытии Казанского университета был издан 5 (17) ноября 1804 г., а в феврале 1805 г. в Казань приехал попечитель учебного округа С.Я.Румовский[6], чтобы осуществить фактическое открытие университета. Вначале профессорами были утверждены два преподавателя гимназии[7], четырем другим в качестве адъюнктов было тоже поручено чтение курсов[8], а объединенную медицинскую кафедру и клинику должен был возглавлять штаб-лекарь И.В.Протасов (но он вскоре скончался). При участии попечителя были отобраны из старших классов 33 лучших ученика гимназии и переведены в студенты. Так 14 февраля 1805 г. был реально открыт Казанский университет. Разделения на факультеты, естественно, не было. Как горячо восприняли образование университета ученики гимназии, вспоминает писатель С.Т.Аксаков – "первый студент" университета (в алфавитном списке его имя стояло на первом месте): *"занимались не только днем, но и по ночам. Все похудели, все переменились в лице, и начальство принуждено было принять деятельные меры для охлаждения такого рвения. Дежурный надзиратель всю ночь ходил по спальням, тушил свечки и запрещал говорить, потому что и впотьмах повторяли наизусть друг другу ответы в пройденных предметах"*[9].

Лобачевский стал студентом почти через два года после фактического открытия университета, В конце 1805/06 учебного года успехи Лобачевского были отмечены большим похвальным листом, и он вместе с другими лучшими учениками старшего класса был намечен к переводу в студенты. Однако отобранных учеников подвергли дополнительным экзаменам, после которых их признали "не довольно успевшими в языках" и оставили в гимназии для усовершенствования "особенно в латинском языке". Только после повторных экзаменов в декабре 1806 г. перевод в студенты состоялся[10].

С января 1807 г. четырнадцатилетний Лобачевский значится казенным студентом и допущен к посещению занятий. Однако в это время математик Г.И.Корташевский, о котором так тепло отзывался С.Т.Аксаков, уже был с ноября 1806 г. уволен из университета после ссоры с самовластным И.Ф.Яковкиным, возглавлявшим одновременно гимназию и университет. Преподавание математики было поручено двум студентам, воспитанникам Г.И.Корташевского: А.Княжевичу и В.Граффу. Несмотря на их отличную подготовку, у них, конечно, не было достаточного педагогического и научного опыта, и к тому же они не имели руководителя. Только через год положение изменилось. В Казань из Германии прибыл и начал читать в марте 1808 г. лекции видный математик профессор М.Ф.Бартельс[11]. Он еще в 1805 г. был приглашен Румовским, но задержался с переездом. Бартельс являлся весьма квалифицированным математиком, очень опытным лектором с широким знанием предмета, но творческой исследовательской работы не вел. В молодые годы среди его учеников был К.Ф.Гаусс, который, сделавшись выдающимся ученым, продолжал в дальнейшем поддерживать с ним дружескую переписку, не касаясь, однако, математических проблем.

Бартельс читал студентам тригонометрию плоскую и сферическую, геометрию аналитическую и дифференциальную, математический анализ и астрономию. Он прочел также в 1810 г. курс истории математических наук. Число слушателей у него было невелико. Среди них особенно выделялись И.Симонов и Н.Лобачевский. Вот одно из свидетельств их успехов, данное Бартельсом в 1811 г. в письме к попечителю[12] (см. [7, № 26]). Они *"оказали столько успехов, что даже во всяком немецком университете были бы отличными..."*, *"...особливо же Лобачевский". "Об искусстве последнего предложу хотя бы один пример, ...поручил я старшему Лобачевскому*[13] *предложить студентам под моим руководством пространную и трудную задачу о вращении, которая мною для себя уже была по Лагранжу в удобопонятном виде обработана"*. Далее Бартельс пишет, что он изложил решение этой задачи в четыре приема, а Симонову поручил конспектировать его лекции. *"Но Лобачевский, не пользовавшись сею запискою, при окончании последней лекции подал мне решение сей столь запутанной задачи на нескольких листочках, в четверку написанное. Г. академик Вишневский, бывший тогда здесь, неожиданно восхищен был сим небольшим опытом знаний наших студентов"*.

Лобачевский в октябре 1809 г. был рекомендован, как особо отличившийся в учебе, к назначению "камерным студентом" (староста казенных студентов, живущих в студенческих комнатах) и после назначения стал получать 60 руб. в год на книги. Но, характеризуя Совету его поведение, директор-инспектор Яковкин отметил и некоторые отклонения от желательного благонравия. Он писал, что Лобачевский... *"часто вел себя очень хорошо, выключая иногда случавшихся проступков, в коих, однако же, к чести его сказать, сказывал после чистосердечное, кажется, признание и исправлялся..."* [7, № 12].

Здесь сделан намек на событие 1808 г., когда Лобачевский был наказан за изготовление ракеты, которую студенты запустили поздно вечером во дворе университета, вызвав большой шум и волнение. Выявить, кто в этом участвовал, Яковкину удалось лишь через три дня, лишив всех подозреваемых обеда.

Живой и самостоятельный характер юного Лобачевского нередко приводил его к столкновениям с администрацией, ограничивающей формальными правилами элементарную свободу поведения студентов. Уже через несколько месяцев после процитированного отзыва в рапорте помощника инспектора П.С.Кондырева сообщается, что в январе 1810 г. *"Лобачевский 1-й оказался самого худого поведения. Несмотря на приказание начальства не отлучаться из университета, он в Новый год, а потом еще раз, ходил в маскарад и многократно в гости, за что опять наказан написанием имени на черной доске". "...Несмотря на сие он после того снова еще был в маскараде"* [7, № 15]. А через год весной 1811 г. Лобачевского лишают звания камерного студента, так как он был *"замечен в соучаствовании и потачке проступкам студентов, грубости и ослушании"* [7, № 19]. И если осенью 1810 г. фамилия Лобачевского стояла на первом месте в предварительном списке студентов, достойных ученого звания магистра[14], то к моменту окончания университета весной 1811 г. она была вычеркнута из этого списка. Несомненно, причиной этого послужил новый рапорт Кондырева от 27 мая 1811 г., который всю картину прошлого поведения студента Лобачевского изображал в следующем виде: *"Лобачевский 1-й в течение трех последних лет был, по большей части, весьма дурного поведения, оказывался иногда в проступках достопримечательных, многократно подавал худые примеры для своих сотоварищей, за проступки свои неоднократно был наказываем, но не всегда исправлялся; в характере оказался упрямым, нераскаянным, часто ослушным и весьма много мечтательным о самом себе, в мнении получившем многие ложные понятия..."* [7, № 20].

Эта уничтожающая инспекторская характеристика позволяет представить себе молодого Лобачевского, уже ощущающего свои растущие силы, его горячность и смелость в борьбе с косностью взглядов и правил. А в новом рапорте даже отмечалось, что Лобачевский *"в значительной степени явил признаки безбожия"* [7, № 21].

Однако 7 июля 1811 г. члены Совета профессора Бартельс, Броннер и Литтров, знавшие и ценившие чрезвычайные способности и глубокие знания Лобачевского, вступились за него и настояли на включении его имени в списки достойных быть магистрами. Решено было вызвать Лобачевского на очередное заседание Совета, объявить ему выговор и потребовать, чтобы он дал честное слово исправиться. Его вызвали 10 июля, причем ему пришлось подписью подтвердить свое обещание. После этого он был включен в список, а затем 3 августа 1811 г. утвержден магистром.

За годы студенчества Лобачевский обучался, как гласит его послужной список, *"...логике, римским древностям, истории и географии, латинскому языку, правам российским и естественному, химии и технологии, зоологии и ботанике, прослушал курс российской словесности; и наук физико-математических, как-то: арифметику, геометрию, алгебру, прямолинейную и сферическую тригонометрию, конические сечения, стереометрию, дифференциальные, интегральные и вариационные исчисления, аналитическую геометрию и механику, статику, гидростатику, аэростатику, гидравлику, оптику, катоптрику и диоптрику, историю математических наук и в особенности астрономии, сферическую, теоретическую и физическую астрономию, физику умозрительную и опытную; при изучении математических наук оказал отличнейшие успехи, дарование и прилежание к оным..."* [40, с. 169].

В годы магистерства Лобачевский штудировал под руководством Бартельса, посещая его на дому, классические труды: "Арифметические исследования" Гаусса и "Небесную механику" Лапласа. Он представил на факультет рассуждение "Теория еллиптического движения небесных тел" (1812 г.) и оригинальное исследование о разрешении двучленных уравнений (1813 г.) [15]. Он не только разъяснял студентам лекции Бартельса, но и вел занятия по арифметике и геометрии (март – октябрь 1812 и 1813 гг.) в открытых чтениях для чиновников, обязанных сдавать экзамены.

26 марта 1814 г. Лобачевский был произведен в адъюнкт-профессоры (аналог современного доцента) и с осени 1814/15 учебного года начал вести самостоятельное преподавание, охватывая в последующие годы весь цикл физико-математических наук (его педагогическая деятельность охарактеризована в настоящей работе на с. 26 – 31).

В этом же году состоялось "полное открытие университета", т.е. была упорядочена его структура, выделены четыре факультета (отделения) и студенты распределены по ним. Состоялось избрание ректора и деканов (деканом физико-математического отделения был избран Бартельс).

В 1814/15 учебном году Лобачевский читал тригонометрию и теорию чисел по Гауссу и Лежандру. Затем в последующие два учебных года он читал обзорный курс элементарной математики, а в 1818/19 учебном году – дифференциальное исчисление. Сохранились студенческие записи его математических лекций за эти три года, показывающие его самостоятельный подход к изложению материала, поиски новых путей. В частности, весной 1817 г. он сделал оригинальную попытку доказать пятый постулат Евклида, установив при этом ряд важных предложений абсолютной геометрии и подготовив этим самым почву для своего будущего открытия (см. [28] и статью Б.Л.Лаптева в [38]).

В 1816 г. его назначают экстраординарным профессором (одновременно с Симоновым) и он постепенно входит все глубже в жизнь и интересы Казанского университета. Он участвует в работе училищного комитета, ему поручают проверку и упорядочение библиотеки, он выручает факультет, заменяя в преподавании физики Броннера, уехавшего из Казани в 1817 г. в длительный отпуск. Однако с 1819 г. жизнь университета резко меняется, начинается период реакционного попечительства М.Л.Магницкого, и в университете создается очень тяжелая обстановка для работы.

В целях борьбы с революционными настроениями и “вольнодумством”, развивающимся среди русской интеллигенции в те годы, правительство Александра I проводит все более реакционную линию и пытается найти идеологическую опору в религии, в мистико-христианских учениях. Университеты в первую очередь подвергаются проверке, чтобы искоренить зарождающиеся в них свободомыслие и атеизм.

Для обследования Казанского университета был назначен и прибыл в марте 1819 г. член Главного правления училищ М.Л.Магницкий. Он явно стремился выслужиться и в своем отчете, считая *“единым основанием народного просвещения благочестие”*, пришел к выводу, что университет *“причиняет общественный вред полуученостью образуемых им воспитанников..., особенно же противным религии их духом деизма”*, а потому *“подлежит уничтожению в виде публичного его разрушения”* (т.е. закрытия) ради назидательного примера другим университетам.

Однако университет не был закрыт. Александр I решил его работу перестроить. Попечителем Казанского учебного округа был назначен М.Л.Магницкий, который и приступил к “обновлению университета”. Он начал свою деятельность увольнением девяти профессоров, введением преподавания “богопознания и христианского учения” и изъятием из библиотеки книг “вредного направления” для их сожжения. Он приказал вывесить в аудиториях религиозные тексты и составил инструкции для преподавания каждой науки в духе религиозного ханжества. Например, *“профессор теоретической и опытной физики обязан во все продолжение курса своего указывать на премудрость божию и ограниченность наших чувств и орудий для познания непрестанно окружающих нас чудес. Профессор естественной истории покажет, что обширное царство природы, как ни представляется оно премудро и в своем целом для нас непостижимо – есть лишь слабый отпечаток того высшего порядка, к которому после кратковременной жизни мы предопределены”* и т.п.

Многие профессора, подчиняясь инструкциям, приспособляли свое преподавание к подобным требованиям. Так, Г.Б.Никольский в объяснительной записке к программе по механике на 1824 г. писал: *“Праотец наш Адам получал нужное наставление непосредственно от своего Создателя... Ему не нужно было учиться подобно нам... Пребывая в раю на Востоке он прямо получал свет от Солнца правды... Он был превосходный богослов, философ, математик, естествослов и проч. ...”* и далее в том же духе. Вместе с тем была установлена тщательная слежка за содержанием лекций и студенческих записок и введен суровый казарменный режим для студентов.

Семь лет этой церковно-полицейской системы принесли Лобачевскому тяжелые испытания, но не сломили его непокорный дух. Он ведет обширную и многообразную педагогическую, административную и исследовательскую деятельность. Он преподает математику, вместо уехавшего в Дерпт (Тарту) Бартельса; продолжает замещать Броннера, так и не вернувшегося в Казань из отпуска, читает физические курсы, заботится об оборудовании физического кабинета, закупает приборы в Петербурге; он замещает Симонова, отправившегося в плавание с экспедицией Беллинсгаузена, и читает астрономические курсы, приняв в свое ведение обсерваторию. В течение ряда лет он избирается деканом. Он занят упорядочиванием библиотеки и расширением ее физико-математической части. Он – активнейший член, а затем и председатель строительного комитета (строился главный университетский корпус, 1822–1825 гг.).

Но, несмотря на обилие обязанностей, он не прекращает напряженной научной деятельности. Он пишет два учебника для гимназий – “Геометрию” (1823) и “Алгебру” (1824). Первый получает отрицательный отзыв академика Н.И.Фусса, не оценившего изменений, внесенных в традиционное изложение, и осудившего введение метрической системы мер, поскольку она создана в революционной Франции. Второй тоже не был опубликован из-за различных задержек.

Вскоре начались столкновения с попечителем. Лобачевский в преподавании физико-математических наук всегда стоял на материалистических позициях. Он отказался от произнесения актовой речи, в которой следовало восхвалять Магницкого и рассуждать на религиозные темы. По словам Магницкого, он стал проявлять дерзость, своеволие, нарушал инструкции. И Магницкий решает установить особый надзор за его поведением (см. [7, № 240]).

В этих унижающих достоинство ученого условиях мысль Лобачевского продолжала работать над построением начал геометрии. После упомянутой нами попытки доказать постулат Евклида в лекциях по геометрии 1817 г. это можно видеть и в рукописи учебника по геометрии 1823 г. (хотя теория параллелей изложена здесь по Евклиду, но структура курса оригинальна), и в Обозрениях преподавания чистой математики на 1822/23 учебный год и на 1824/25 учебный год. В первом Обозрении трудности проблемы параллелей названы “до сих пор непобедимыми”, а во втором вопрос обойден молчанием, что, по-видимому, указывает на начавшееся успешное разрешение проблемы. Эта напряженная работа мысли завершается гениальным открытием – созданием новой геометрии.

СОЗДАНИЕ НОВОЙ ГЕОМЕТРИИ.
ФОРМИРОВАНИЕ ГЕОМЕТРИИ И “НАЧАЛА” ЕВКЛИДА. ПРОБЛЕМА ПАРАЛЛЕЛЕЙ И ЕЕ РЕШЕНИЕ

Первое сообщение о созданной им новой геометрии Лобачевский представил 7 (19) февраля 1826 г. в Отделение физико-математических наук университета в виде сочинения “Сжатое изложение начал геометрии со строгим доказательством теоремы о параллелях”. Он просил поместить это сочинение в подготавливаемых к изданию “Ученых записках”, если мнение его сотоварищей ученых будет положительным[16].

Вопрос рассматривался 11 (23) февраля. Была назначена комиссия, в которую входили профессор И.М.Симонов, профессор А.Я.Купфер и адъюнкт Н.Д.Брашман. Сам Лобачевский указывает, что он читал это рассуждение в заседании Отделения 12 февраля 1826 г. (см. [1, т. 1, с. 185])*. Однако комиссия письменных отзывов не представила. Возможно, что причиной этого было непонимание или недооценка труда Лобачевского. Но всего вероятнее причина заключалась в том, что издание “Ученых записок” не осуществилось и редакционная подготовка стала излишней.

Через год в 1827 г. Лобачевский был избран ректором университета и к его научно-педагогическим трудам добавились ответственные и нелегкие административные обязанности. Только через три года после доклада он находит время опубликовать в журнале “Казанский вестник” свое исследование “О началах геометрии” [1, т. 1, с. 177]. Это была первая в мировой печати работа по неевклидовой геометрии. Она содержала не только основную часть его рассуждения “Сжатое изложение...” (1826 г.), но и дальнейшее развитие его идей, в частности, вычисление площадей и объемов ряда фигур и тел, примеры применения новой геометрии в вычислении некоторых определенных интегралов и трактовку вопроса о геометрии физического пространства.

Геометрия, созданная и разработанная. Лобачевским[17], являлась более общей, чем евклидова, и включала последнюю как предельный случай. Основное отличие заключалось в более богатой свойствами (но, конечно, и более сложной) теории параллельных прямых.

Выявить, какая из геометрий действует в реальном физическом пространстве, могли только наблюдения, только эксперименты. Такой подход вполне соответствовал материалистическим взглядам Лобачевского, рассматривавшего природу как объект для научных исследований, объект, существующий вне и независимо от исследователя. Он писал: *“Всем известно, что в геометрии теория параллельных до сих пор оставалась несовершенной. Напрасное старание со времен Евклида, в продолжение двух тысяч лет, заставило меня подозревать, что в самих понятиях еще не заключается той истины, которую хотели доказывать и которую поверить, подобно другим физическим законам, могут лишь опыты, каковы, например, Астрономические наблюдения”*.

Чтобы отчетливее представить себе, в чем заключалась “проблема параллелей” и как Лобачевский созданием своей геометрии разрешил эту проблему (а точнее, в философском смысле, снял ее), следует обратиться к истории вопроса.

Как показывают археологические раскопки и исследования, проведенные на территориях Египта и Месопотамии, математика является одной из древнейших наук. Возникла и развивалась она в силу жизненных потребностей человеческого общества. Необходимо было вести учет количества людей, скота, продуктов питания, измерять время (календарь), расстояния, оценивать площади земельных участков и урожай (для сбора налогов), объемы сосудов, военные заготовки, рассчитывать торговые и финансовые операции, взвешивать товары и т.п.

Документы той эпохи (папирусы и глиняные таблички) свидетельствуют, что математика носила тогда (III – II тысячелетие до н.э.) инженерно-практический характер, т.е. математические знания, методы и приемы оформлялись в виде как бы справочников, т.е. сборников, содержащих постановку и решение типичных задач; правила и формулы отчетливо не были выражены, но их можно было усвоить, рассматривая конкретные задачи и числовые примеры. После изложения хода решения задачи, которое начиналось с обращения к читателю: “Делай так!”,– конечный результат всегда подвергался проверке. У вавилонских математиков существовали вспомогательные таблицы умножения, квадратов, кубов, обратных величин. Был разработан счет с дробями. Решались задачи, сводящиеся к линейным и квадратным уравнениям, к системам

уравнений.
В области геометрии была известна зависимость между катетами и гипотенузой прямоугольного треугольника, площади основных фигур, объемы простейших многогранников, приближенные формулы для вычисления длины и площади круга.

Однако математика как наука, обладающая своей определенной структурой, применяющая логические выводы – доказательства при разработке учения о числах и фигурах, тогда еще не существовала. В таком виде она сложилась позднее, в условиях культуры Античной Греции V – IV вв. до н.э. Социально-экономическое строение общества здесь хотя и принадлежало к рабовладельческой формации, но в отличие от деспотий Египта и Вавилона в управлении государством проявлялся известный демократизм, распространявшийся, конечно, только на свободных граждан. Политически Греция существовала в виде небольших городов-государств (полисов), нередко объединявшихся в союзы. Вопросы управления, жизни и дел государственных обычно обсуждались на собраниях свободных граждан (являвшихся в большинстве рабовладельцами). Эти обсуждения, высказывания, речи и споры в значительной степени благоприятствовали общению граждан, появлению и развитию логики, отделению философии от религии, формированию отдельных наук и, в частности, становлению математики как науки. Математика теперь развивается философами и учеными, имена которых и даже сочинения (или цитаты из них) дошли до нас: Фалес Милетский (VI в. до н.э.), школа Пифагора (V в. до н.э.), Гиппократ Хиосский (V в. до н.э.), Демокрит (V в. до н.э.), Евдокс (IV в. до н.э.), Аристотель (IV в. до н.э.), Евклид (IV – III в. до н.э.), Архимед (III в. до н.э.), Аполлоний (III в. до н.э.) и др.

У философа-энциклопедиста и создателя формальной логики Аристотеля (IV в. до н.э.) отчетливо сформулированы логические принципы дедуктивного построения математической дисциплины. Они, несомненно, уже частично проявились в трудах предшествующих и современных ему ученых, что и послужило основой для его обобщения.

Чтобы что-то доказывать, делать логические выводы, нужно опираться на какие-то предшествующие положения, уже доказанные ранее. Но это восхождение к началам науки не может длиться до бесконечности, если не впадать в логическую ошибку “порочного круга”, т.е. если не опираться на предложение, являющееся следствием того, что требуется доказать.

Эти принципы особенно четкое воплощение получили в обширном труде Евклида “Начала”, текст которых дошел и до нашего времени. Книга Евклида пользовалась на протяжении более двух тысячелетий громадной популярностью.

“Начала” Евклида состоят из 13 книг (частей) и в основном содержат материал, относящийся теперь к элементарной геометрии. Однако в них включены еще в своеобразной геометрической трактовке начала алгебры и теории чисел. Конечно, не все доказательства придумывал сам Евклид. Он использовал многие рассуждения и результаты, полученные в предшествующие два-три столетия. Следует еще учесть, что “Начала” не являются энциклопедией всех математических знаний его времени. Так, например, в них не включено учение о конических сечениях. “Начала” – это систематическое изложение основных начальных математических сведений, опираясь на которые можно начинать самостоятельные исследования. С этим материалом Евклид знакомил своих слушателей в “Мусейоне”[18] (“Дом муз” – покровительниц наук и искусств. Так называлось в Александрии государственное научное учреждение, аналогичное объединению Академии наук с университетом и вспомогательными подразделениями – громадной библиотекой, обсерваторией, ботаническим садом и т.п.).

“Начала” переводили на все языки мира (на латинский в IV в. н.э., на арабский в IX в. н.э.). Первое печатное издание появилось в XV в. Они служили учебным руководством в университетах, а затем в XVIII – XIX вв. в школах (иногда в сокращенном или переработанном виде). В своих дальнейших исследованиях математики опирались на “Начала”, как на нечто бесспорное. Их логическая структура считалась образцом дедуктивного построения для любой науки. Система геометрии, в них развитая, служила и служит до настоящего времени нашей обычной инженерной практике, дает основу знаний о пространственных отношениях. На нее опирается современная классическая механика, основные принципы которой были сформулированы И.Ньютоном в XVII в.

“Начала” имеют следующую структуру. Почти каждая книга начинается с определений тех терминов, которые в ней впервые появляются. Так, в начале первой книги помещены 23 определения. С современной точки зрения многие из них не являются строгими математическими определениями. Например: “Точка – то, что не имеет частей”, “линия – длина без ширины” и др. Но есть и содержательные определения. Например, для прямого угла, окружности, квадрата и т.п.

За определениями в первой книге находятся 5 постулатов и 4 аксиомы[20]. Это те предложения, которые принимаются без доказательства и на основе которых логически выводится все содержание “Начал”. Разница между постулатами и аксиомами[21], как полагают многие исследователи “Начал”, заключается в том, что первые имеют конструктивный характер и относятся только к самим геометрическим фигурам, а вторые частично и к числам, возникающим как геометрические величины (длина, величина угла, площадь, объем).

Далее развивается постепенно система геометрий в виде цепи предложений (теорем), которые логически доказываются с помощью ссылок на аксиомы, постулаты и предшествующие теоремы. Имеются и конструктивные задачи, решаемые с помощью циркуля и линейки. Их решение обосновывается аналогичным образом.

Приведем теперь формулировку аксиом и постулатов Евкдида (один из вариантов [24]).

ПОСТУЛАТЫ

Нужно потребовать:

1. Чтобы от каждой точки к каждой точке можно было провести прямую линию.
2. И чтобы ограниченную прямую можно было непрерывно продолжать по прямой.
3. И чтобы вокруг любого центра любым радиусом можно было провести окружность.
4. И чтобы все прямые углы были равны друг другу.
5. И чтобы, когда прямая, пересекая две прямые, образует внутренние односторонние углы, составляющие в сумме меньше двух прямых углов, эти прямые при продолжении пересекались в точке, лежащей с той стороны, где расположены эти углы.

АКСИОМЫ

1. Равные одной и той же равны между собой.
2. И если к равным придать равные, то получатся равные.
3. И если от равных отнять равные, то получатся равные.
4. Совмещаемые друг с другом равны друг другу.

В конце XIX в. были выявлены существенные пробелы в аксиоматике “Начал” (например, там не было охарактеризовано понятие порядка точек на прямой, понятие непрерывности и др.). Но до этого труд Евклида рассматривался как самое совершенное дедуктивное изложение системы геометрии, и задачей многочисленных комментаторов на протяжении двух тысячелетий являлось внесение пояснений или некоторых усовершенствований.

Особое внимание комментаторов привлекала проблема параллелей. Уже через несколько столетий после создания “Начал” установился ошибочный взгляд, что постулаты и аксиомы не требуют доказательств в силу своей простоты и очевидности[22]. Но пятый постулат резко отличался от прочих более сложной формулировкой и отсутствием непосредственной очевидности. Ученым казалось, что это скорее теорема, которую Евклид просто не сумел доказать.

Таким образом, возникла необходимость доказать это предложение, опираясь как на исходные на остальные аксиомы и постулаты. Это была задача, над решением которой впоследствии безуспешно бились сотни геометров. В каждом из предложенных ими доказательств удавалось затем обнаружить или грубые ошибки в рассуждениях, или более глубоко скрытые неточности, заключающиеся в том, что автор незаметно для себя пользовался каким-то новым постулатом или предложением, невыводимым из остальных. На этом пути выявился целый ряд предложений, эквивалентных пятому постулату, т.е. предложений, которыми можно заменить пятый постулат при построении системы геометрии[23], но сама проблема оставалась нерешенной.

Рассмотрим несколько таких попыток “исправления” Евклида:

Посидоний (I в. до н.э.) предложил назвать параллелью прямую, все точки которой удалены от данной прямой на постоянное расстояние. Тогда пятый постулат легко доказывается. Ошибка Посидония заключается в незаметно введенном (в формулировке определения параллелей) новом постулате: на плоскости геометрическое место точек, отстоящих от данной прямой на постоянное расстояние, является прямой линией.

Прокл (V в. н.э.) критиковал Посидония и сам дал доказательство, опирающееся на допущение, что если две прямые параллельны, то расстояние между ними ограничено, что, конечно, является новым постулатом.

Ал Джаухари (IX в. н.э.) пользовался в своем доказательстве допущением, что если накрест лежащие углы равны для одной секущей, то они равны и для другой.

Сабит ибн Корра (IX в. н.э.) допускал, что существует “простое” (поступательное) движение (все траектории прямые). А тогда любые две траектории равностоящие прямые, и постулат параллельности доказывается.

Омар Хайям (XI – XII вв. н.э.), комментируя ибн ал Хайсама (X – XI вв.), повторившего доказательство Сабит ибн Корры, отвергал ссылки на существование “простого” движения как не носящие математического характера. Сам он ввел явно новый постулат, ссылаясь на Аристотеля: на плоскости две сближающиеся прямые обязательно пересекутся, т.е. невозможно, чтобы сближение перешло в расхождение у двух непересекающихся прямых. Он стал рассматривать четырехугольник *ABDC* с прямыми углами при основании *CD* и равными боковыми сторонами *AC* и *BD.* Легко доказывается, что тогда . Возможны только три предположения о величине угла α. *1.* Угол α – острый ($\alpha<\pi/2$). Гипотеза острого угла. *2.* Угол α – тупой ($\alpha>\pi/2$). Гипотеза тупого угла. *3.* И, наконец, угол α – прямой ($\alpha=\pi/2$). Гипотеза прямого угла. С помощью постулата Аристотеля Хайям доказал, что первый и второй случаи невозможны.

Переходим к ученым Западной Европы.

Английский математик **Валдис** (XVII в.) тоже явно принял новый постулат. Он допустил существование подобных (но не равных друг другу) треугольников и, опираясь на пропорциональность их сторон, доказал, что перпендикуляр и наклонная, проведенные к одной прямой, пересекаются, т.е. постулат Евклида.

Пусть AA^1 и BB^1 – перпендикуляры к *AB*, а луч *AS* образует с *AB* острый угол. Из произвольной точки M_1 луча *AS* опустим перпендикуляр M_1B_1 на *AB* и рассмотрим треугольник *ABM,* подобный трегольнику AB_1M_1. Для этого нужно продолжить AM_1, чтобы расстояние *AM* было пропорционально AM_1, т.е.

,

и треугольник *ABM* будет искомым. Но из подобия следует, что его угол *ABM* равен углу AB_1M_1, т.е. прямой. Следовательно, точка *M* лежит на прямой BB^1, значит, луч *AS* пересекает BB^1 в точке *M.*

Итальянский математик **Джироламо Саккери** (XVIII в.) опирался на изучение четырехугольника Хайяма (после Хайяма в XIII в. такой же четырехугольник был принят в основу доказательств астрономом и математиком Насир ад Дином ат Туси). Он привел к противоречию следствия из гипотезы тупого угла, а далее после длинной цепи рассуждений получил, как ему казалось, противоречие и в следствиях из гипотезы острого угла. Тогда оставалась третья гипотеза, и из нее вытекал постулат Евклида. Но фактически противоречие во втором случае им не было получено, так как в трактовку бесконечно удаленных частей вкралась ошибка.

Известный французский математик **А.Лежандр** (1752 – 1833), автор широко распространенного в те годы учебника "Начала геометрии" (или "Элементы геометрии"), тоже сделал ряд попыток доказать постулат Евклида. Он исходил из величины суммы углов треугольника и без труда доказал, что эта сумма не может быть больше π. Но в своем доказательстве, что она не может быть и меньше π, он незаметно ввел новое допущение, что через точку *M,* лежащую внутри острого угла *AOB,* всегда можно провести прямую, пересекающую обе стороны *OA* и *OB* этого угла. Если бы не введение нового допущения, эквивалентного постулату Евклида, можно было бы считать этот постулат доказанным, так как он вытекает из третьего возможного предположения, что сумма углов треугольника равна π.

Обнаружив впоследствии свою ошибку, Лежандр в дальнейших изданиях своего учебника отказался от попыток дать доказательство пятого постулата и высказал его в следующей форме: ***на плоскости перпендикуляр и наклонная, проведенные к одной прямой, пересекаются***.

Таким образом, в начале XIX в. ***проблема параллелей*** оставалась нерешенной.

Лобачевский в первые годы своей педагогической деятельности тоже делал, как уже было упомянуто, попытку доказать постулат Евклида (1817 г.). Он действовал смелее своих предшественников и далеко углубился в следствия, вытекающие из гипотезы, что сумма углов треугольника меньше π. При этом он доказал ряд важных теорем абсолютной геометрии. Но затем все-таки ему пришлось признать свою попытку неудачной, так как он воспользовался в одном месте недоказанным допущением [28, 38].

В составившем эпоху в развитии геометрии докладе 1826 г. он дал уже окончательное, но совсем неожиданное решение проблемы. Он создал новую геометрию, заменив Евклидов постулат более общей аксиомой параллельности и сохранив прочие аксиомы и постулаты. Если бы удалось убедиться в непротиворечивости новой геометрии, то отсюда вытекала бы недоказуемость пятого постулата, так как сама новая аксиома ему противоречила, и, следовательно, раз в новой геометрии противоречия не получилось, то, значит, этот постулат не мог быть доказан на основе остальных постулатов и аксиом Евклида. Вместе с тем новая аксиома параллельности включала прежнюю как предельный случай, т.е. новая геометрия обобщала евклидову.

Смысл аксиомы Лобачевского легче понять, если рассмотреть предварительно на плоскости произвольную прямую A^1A, точку *P* вне прямой, перпендикуляр *PQ к* прямой A^1A и переменную точку *M* па луче *QA.* При перемещении точки *M* по лучу *QA* в сторону *QA* прямая *PM* монотонно поворачивается против часовой стрелки. Но она не может достигнуть положения *PB* (B^1PB перпендикулярно *PQ*), так как B^1B не пересекает A^1A, и, таким образом, имеется какое-то предельное положение *PT*, к которому приближается *PM,* когда *M* неограниченно удаляется по лучу *QA.*

1°. Если допустить, что *PT* совпадает с *PB,* мы получим постулат параллельности Евклида. Единственной непересекающей прямой, проходящей через *P*, будет B^1B.

2°. Если сделать более общее допущение (оно и было принято Лобачевским), что прямая *PT* образует с *PQ* некоторый острый угол α (), названный Лобачевским ***углом параллельности*** для отрезка *PQ* (α=П(PQ)), то мы получаем новую аксиому параллельности, ***аксиому Лобачевского***.

Заметим, что в случае 2° луч *PT* не может пересекать *QA,* так как иначе, взяв за точкой пересечения *U* еще точку *M*, мы получим луч *PM,* тоже пересекающий *QA*; т.е. *PT* не был бы тогда предельным для лучей *PM,* пересекающих *QA.*

Этот луч *PT,* будучи продолжен в обратную сторону, образует прямую T^1T, названную Лобачевским параллелью *к* A^1A в точке *P* в направлении A^1A. Но, кроме *PT*, все лучи, входящие в угол *TPB,* и их продолжения тоже не пересекаются A^1A.

Таким образом, если учесть симметрию относительно *PQ*, мы видим, что все прямые, проходящие через точку *P*, лежащую вне прямой A^1A, делятся на два класса с помощью двух разграничивающих прямых T^1T и UU^1, где UU^1 симметрична T^1T. Эти две прямые T^1T и UU^1 названы параллелями в точке *P* к прямой A^1A в двух ее направлениях, соответственно, A^1A и AA^1. Классы прямых таковы.

I класс. Прямые, пересекающие A^1A (это–прямые, входящие внутрь пары вертикальных углов U^1PT и UPT^1, т.е. пары, содержащей прямую *PQ*).

II класс. Прямые, не пересекающие A^1A (это– параллели T^1T и UU^1 и все прямые, входящие внутрь пары вертикальных углов *TPU* и U^1PT^1, т.е. пары, содержащей прямую B^1B). Прямые, входящие внутрь упомянутой второй пары вертикальных углов, Лобачевский назвал “разводными” (смысл этого термина будет ясен из дальнейшего). Теперь их называют расходящимися, или сверхпараллелями к прямой A^1A.

Если угол параллельности делается прямым, то параллели T^1T и UU^1 сливаются в одну прямую B^1B, единственную параллель к прямой A^1A (в двух ее направлениях). Т.е. геометрия Евклида может быть получена как предельный случай из геометрии Лобачевского.

Отметим, что в своей первой публикации Лобачевский развивал геометрию, исходя из предположения, что сумма углов треугольника меньше π, откуда уже вытекала рассмотренная выше теория параллелей. В последующих работах он сначала излагает теорию параллелей, сразу начиная различать два класса прямых: прямые, пересекающие и не пересекающие данную.

Аксиому параллельности Лобачевского можно сформулировать и в такой форме (чтобы непосредственно выявить противоречие с евклидовой аксиомой): на плоскости через точку, лежащую вне данной прямой, проходит более одной прямой, не пересекающей данную*.

БОРЬБА ЛОБАЧЕВСКОГО ЗА СВОИ ИДЕИ. ДРУГИЕ ТВОРЦЫ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ – БОЙАИ И ГАУСС

Замечательный труд Лобачевского “О началах геометрии” (1829– 1830 гг.), явившийся первым исследованием в новой области и открывший период появления неевклидовых геометрий, был по решению Совета университета от 19 августа 1832 г. послан в Академию наук в соответствии с желанием автора, *“в знак уважения сему высокому сословию мужей”* [7, № 344].

В ноябре 1832 г. известный математик академик М.В.Остроградский, рассмотревший по поручению Академии работу Лобачевского, сделал о ней устное сообщение. Оно содержало резко отрицательную оценку труда Лобачевского. Остроградский совершенно не придал значения созданию новой геометрии. В своем ра-порте он писал: *“Автор, по-видимому, задался целью писать таким образом, чтобы его нельзя было понять”* [7, № 354]. Упоминая далее о новой геометрии, вытекающей из гипотезы, что сумма углов в треугольнике меньше, чем два прямых угла, и ее приложениях к вычислению определенных интегралов, он указал, что один из них легко получить классическим путем, а другой неверен (последнее было несправедливо). В итоге он пришел к выводу: *“Все, что я понял в геометрии г-на Лобачевского, ниже посредственного...”* и в заключение написал: *“Книга г-на ректора Лобачевского опорочена ошибкой, небрежно изложена и, следовательно, не заслуживает внимания Академии”*.

А через два года в октябре 1834 г. в реакционном журнале Ф.Булгарина “Сын отечества” (№ 41) появилась написанная в издевательском тоне критика на работу Лобачевского, подписанная инициалами С.С. Нет сомнения, что эта рецензия возникла не без влияния М.В.Остроградского (см. об этом [I, т. I, с. 406]). Неизвестный рецензент писал: *“Как можно подумать, чтобы г. Лобачевский, ординарный профессор математики, написал с какою-нибудь серьезною целию книгу, которая не много бы принесла чести и последнему приходскому учителю? Если не ученость, то по крайней мере здравый смысл должен иметь каждый учитель, а в новой геометрии нередко недостает и сего последнего”*. В заключение он предлагал назвать книгу Лобачевского *“Сатира на геометрии, карикатура на геометрии”*.

Лобачевский послал в редакцию журнала свои возражения на эту критику, но они не были опубликованы, хотя министр народного просвещения и ***приказал*** издателю журнала поместить их.

Встретив непонимание и издевательства, Лобачевский не прекратил своей работы над развитием новой геометрии, а продолжал отстаивать свои идеи, понимая их чрезвычайное значение. Одна за другой появляются следующие его геометрические работы: "Воображаемая геометрия" (1835) [1, т. 3], где он исходит из найденных им тригонометрических соотношений и по ним восстанавливает всю свою геометрию; "Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам" (1836) [1, т. 3], в которой найдено более двухсот определенных интегралов и получены формулы для вычисления объема прямоугольного тетраэдра; "Новые начала геометрии с полной теорией параллельных" (1835–1838) [1,т.2], где вскрыты ошибки в известных в научной литературе доказательствах пятого постулата, высказаны общие соображения о возможности существования различных геометрий и отмечены ожидаемые приложения новой геометрии при исследовании природы; после критики Евклида за неясность исходных понятий Лобачевский дал в этом труде подробное изложение своей системы геометрии, опирающееся на другие исходные понятия.

Стремясь познакомить европейских ученых со своими идеями, Лобачевский публикует две работы за границей. Одну – на французском языке в журнале Крелле, назвав ее "Gйomйtrie imaginaire" (1837)[25], другую, содержащую сжатое и доступное изложение новой геометрии, – в виде отдельной книжечки на немецком языке в издательстве Финке, под названием "Geometrische Untersuchungen" (1840)[26].

Наконец, за год до смерти, он, уже больной и ослепший, диктует свой последний труд "Пангеометрия" (1855) для сборника, посвященного 50-летию университета. В год его смерти этот труд выходит еще и во французском переводе – "Pangйomйtrie" (1856) [1, т. 3].

Так до самой своей кончины Лобачевский вел борьбу, отстаивая свои идеи, значение которых не смогли оценить его современники. При его жизни было опубликовано только два положительных отклика. Профессор Казанского университета П.И.Котельников* в актовой речи "О предубеждении против математики" (1842) высказался сочувственно о его идеях, выразив надежду, что *"изумительный труд г-на Лобачевского ...рано или поздно найдет своих ценителей"* [7, № 474]. Позднее, в 1851 г., венгерский математик Фаркаш Бойаи в своей малоизвестной книге, сравнивая идеи Лобачевского с результатами своего сына Яноша, выражал удивление сходством столь необычайных идей, появившихся почти одновременно в разных странах у двух математиков, не знавших друг друга.

Был и еще один отзыв, высказанный в частной переписке и ставший известным значительно позднее. Речь идет об оценке К.Ф.Гаусса, пришедшего к неевклидовой геометрии раньше и независимо от Лобачевского (подробнее об этом см. далее). Познакомившись с упомянутым выше небольшим сочинением "Geometrische Untersuchungen", изданным в Германии, он был восхищен им, о чем написал своим друзьям. Однако в печати с поддержкой идей Лобачевского он не выступил, хотя и предложил избрать его, не уточняя причину, членом Геттингенского Общества наук (академии), директором которого состоял, что и было сделано в ноябре 1842 г.

Славу создания неевклидовой геометрии, как уже было упомянуто, Лобачевский разделяет с Я.Бойаи и К.Ф.Гауссом. Оба они пришли независимо от Лобачевского к той же общей системе геометрии.

Янош Бойаи (Janos Bolyai, 1802–1860), или Больяй, военный инженер, сын Фаркаша Бойаи (1775–1856), преподавателя математики в колледже небольшого венгерского города. Во время своего учения в Военной Академии в Вене он увлекся проблемой параллелей. Отец, узнав об этом, пришел в отчаянье. Сохранилось его письмо от 1823 г. к сыну: *"Ты не должен пытаться одолеть теорию параллельных линий на этом пути, я знаю этот путь, я проделал его до конца, я пережил эту беспросветную ночь и всякий светоч, всякую радость жизни я в ней похоронил... Эта беспросветная мгла может поглотить тысячи таких гигантов, как Ньютон, и никогда на земле не прояснится..."* [13, с. 18].

Однако Янош продолжал работать над проблемой параллельных, и есть сведения, что в 1825 г. он показывал рукопись своего исследования одному из венских математиков, преподавателю Академии. Результаты своих геометрических исследований ему удалось опубликовать в 1832 г. на латинском языке в виде приложения или прибавления (по-латински – appendix)[27] к первому тому обширного курса математики его отца – "Tentamen Juventutem..." (Попытка наставления юношам...).

"Аппендикс" [28] содержит сжатое и систематическое изложение основ той же системы геометрии, которую разработал Лобачевский. Причем автор особенно старался получать теоремы в форме, пригодной для абсолютной геометрии. Однако отец не мог воспринять идеи сына и для разрешения спора отправил работу, по выходе ее из печати, на суд Гаусса, с которым еще в юные годы дружил (но затем их переписка прекратилась). Ответ Гаусса был неожиданным и можно сказать двусмысленным. Он писал, что не может хвалить работу сына, так как это значило бы хвалить самого себя. Потому что он сам давно пришел к этой системе геометрии, но решил при жизни ничего о ней не публиковать, опасаясь встретить непонимание. Кое-что немногое он уже записал для себя. Он поражен, что сын его друга изложил его идеи и таким образом освободил его от обязанности выполнить этот труд.

Гаусс не оказал открытой поддержки замечательным идеям Бойаи и нигде в печати о его работе не высказывался. Янош Бойаи был поражен таким странным ответом знаменитого ученого и отсутствием моральной поддержки. Ему даже казалось, что Гаусс просто хочет вырвать у него приоритет открытия. Позднее, когда он познакомился с "Геометрическими исследованиями" (1840 г.) Лобачевского и узнал, что первое изложение новой системы опубликовано еще в 1829 г. в "Казанском вестнике", т.е. на два года ранее "Аппендикса" (отдельные оттиски которого появились в 1831 г.), он сначала заподозрил, что никакого Лобачевского не существует, что все это (в том числе и дату – 1829 г.) придумал Гаусс, укрывшийся под псевдонимом "Лобачевский" с единственной целью присвоить приоритет открытия. Но потом он стал тщательно анализировать текст, объективно отмечая оригинальные достижения и отдельные недоговоренности в изложении. Однако дальнейших исследований по развитию неевклидовой геометрии Я.Бойаи не проводил, а одно время даже думал, что обнаружил в ней противоречие.

Обратимся теперь к одному из крупнейших математиков того времени, **К.Ф.Гауссу** (Carl Friedrich Gauss, 1777 – 1855), имя которого мы уже называли. Его исследования по проблеме параллелей и достигнутые им результаты получили известность лишь после его смерти, когда была опубликована его переписка и научные дневники. О причинах нежелания ученого высказываться публично по этому вопросу мы уже упоминали. На эти причины он ссылался в ряде писем к своим друзьям. Многие исследователи, кроме того, указывают, что он вообще никогда не спешил с публикацией своих результатов. Однако на основе анализа переписки Гаусса выявлено, что одной из основных причин его молчания было его идеалистическое мировоззрение (см. [32]). Гаусс сам долго не мог примириться со своим открытием, с возможностью существования новой обобщенной геометрии. Появление новой геометрии вызывало необходимость опытной проверки аксиомы параллельности (или суммы углов треугольника), что противоречило его идеалистическим убеждениям, согласно которым математика (арифметика, анализ, геометрия) – это чистое творение человеческого духа, выражающее единственным образом внутреннее воззрение на мир.

Подводя итоги, мы видим, что славу создания новой геометрии разделяют с Лобачевским и Гаусс, и Бойаи, но приоритет в публикации принадлежит Лобачевскому, который, кроме того, в течение всей своей жизни продолжал развивать свои идеи и не прекращал борьбы за торжество научной истины.

ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

Педагогическая деятельность Лобачевского, как уже отмечалось, началась в годы его магистерства (1811 – 1814 гг.), когда он разъяснял студентам лекции Бартельса, занимался с ними по поручению Совета, вел курсы арифметики и геометрии для чиновников. После утверждения в звании адъюнкта, с осени 1814/15 учебного года, он приступает к самостоятельному преподаванию и ведет его в университете на протяжении 31 года. В 1844/45 учебном году Лобачевский был назначен Управляющим Казанским учебным округом, т.е. временно исполняющим обязанности попечителя, и счел тогда необходимым просить передать кафедру чистой математики молодому ученому, своему ученику – А.Ф.Попову (об этом см. на с. 48 – 49).

Постепенно круг дисциплин, по которым он читал лекции, расширялся, и в итоге охватил почти все предметы физико-математического цикла. Здесь мы видим не только математические дисциплины (элементарную математику, плоскую и сферическую тригонометрии, теорию чисел, дифференциальное и интегральное исчисления, аналитическую и начертательную геометрии, дифференциальные уравнения, вариационное исчисление), но и аналитическую механику, гидростатику и гидравлику, астрономию, физику опытную и математическую. Картина, по широте охвата характерная для ученого скорее XVII, чем XIX в. При этом следует учесть, что Лобачевский со всей страстью своей натуры вникал в преподаваемый им предмет, изучал предварительно основную классическую литературу, знакомился с новыми учебными руководствами, следил за текущей научной периодикой. Он отличался самостоятельным глубоким подходом к исходным положениям преподаваемой им области науки. Его преподавание сочеталось, таким образом, с исследовательской деятельностью и сопровождалось использованием важнейших трудов и учебных пособий, изучением новейшей журнальной научной литературы, а в опытных науках – соответствующей экспериментальной частью.

Такая широта диапазона преподаваемых дисциплин безусловно отражает многообразие интересов великого геометра. Мы видим, что его влекла к себе не только математика. Им владело стремление познать законы природы, глубже проникнуть с помощью математических методов в сущность физических явлений, в систему строения Вселенной. Он являлся по своему складу исследователем-естествоиспытателем. Еще в студенческие и магистерские годы он проявлял большой интерес к астрономии и вместе с другими двумя студентами вел астрономические наблюдения[29]. Занимаясь механикой, Лобачевский блестяще решил *"пространную и трудную задачу о вращении"*, а при изучении "Небесной механики" Лапласа он, по отзыву Бартельса, *"не только проник в то, о чем в этом труде говорится, но и сумел обогатить его собственными идеями"*. В период чтения лекций по опытной физике (1819 – 1825; 1829 – 1833 гг.) он занимался оборудованием физического кабинета (закупка и изготовление аппаратуры и учебных пособий) и знакомился с новейшей научной литературой и периодикой в области физики. Тогда же он опубликовал научно-популярные статьи по акустике (1823, 1828 гг.).

В 1830-х годах Лобачевский участвовал в постройке метеорологической обсерватории, проводил затем по собственной инициативе наблюдения за температурой почвы, оборудовав для этого специальный колодец. В 1842 г. он в составе экспедиции Казанского университета совершил поездку в Пензу для наблюдения солнечного затмения.

Конечно, внешние обстоятельства тоже сыграли определенную роль в том, что он обратился к преподаванию физики и астрономии, так как порою из-за внезапного отъезда тех или других профессоров (Броннер, Бартельс, Симонов, Купфер) Лобачевскому приходилось временно вести их курсы. Но, конечно, если бы он не был достаточно эрудирован в соответствующей области и не имел прямого интереса к этой ветви науки, он не согласился бы выполнять новые трудные обязанности. Рассмотрим теперь в хронологическом порядке, какие курсы он читал.

Как мы уже упоминали, ему, молодому адъюнкту, поручают читать в 1814/15 г., говоря современным языком, спецкурс – теорию чисел (по Лежандру и Гауссу) и, кроме того, плоскую тригонометрию. У него было вначале 7, а с января – всего 4 слушателя, что не было тогда исключительным явлением. После того, как в 1814 г. студенты были распределены по отделениям (факультетам), на старших курсах физико-математического отделения оказалось очень мало студентов. Так, например, лекции Бартельса посещало всего 2 студента. Однако со следующего 1815/16 г. Лобачевский читает обзорный курс элементарной математики – арифметику и алгебру – для студентов первого и второго года обучения, и у него – 26 слушателей. В 1816/17 г. он продолжает этот курс, читает раздел "Логарифмы и элементарная геометрия". В следующем году ему поручили вести плоскую и сферическую тригонометрию. В 1818/19 г. он перешел к преподаванию высшей математики и вел дифференциальное исчисление и начала интегрального. Но затем, в 1819/20 г., в связи с отъездом Симонова в Антарктическую экспедицию, Лобачевскому, в соответствии с выраженным им согласием, поручают вести астрономию, и он преподает ее 2 года. С этого же года он приступает к ведению курса опытной физики, так как профессор Броннер не вернулся из отпуска, и продолжает вести его в течение 5 лет, кончая 1823/24 г. В конце этого периода ему вновь приходится 2 года читать астрономические курсы (1823/24 – 1824/25 гг.), так как Симонов и назначенный на кафедру физики профессор Купфер были отправлены за границу для закупки астрономических инструментов. Затем 5 лет физику преподавал А.Я.Купфер, но, будучи избран в Академию наук, в 1828 г. он уехал в Петербург, и Лобачевский вновь ведет опытную физику еще 4 года (с 1829/30 г. по 1832/33 г. включительно). При этом преподавание математической физики он продолжал на протяжении всего этого времени, т.е. 14 лет – с 1819/20 г. по 1832/33 г. включительно. Однако и в 1833 г. он не оставил физику окончательно. В 1838/39 – 1839/40 гг. им были прочитаны два цикла "публичных" (научно-популярных) лекций по физике, которые привлекли большое число слушателей и слушательниц.

Вместе с тем он не прекращал в эти годы (за исключением 1819/20 г.) чтения математических курсов, читая, кроме элементарной математики и дифференциального исчисления, еще аналитическую и начертательную геометрию, а также приложение дифференциального интегрального исчисления к геометрии и механике, а затем в 1824/25 г. – еще и вариационное исчисление.

Но с 1825/26 г. в течение 2 лет Лобачевский математику не преподавал, поскольку пожелал вести курс аналитической и практической механики и вел его 4 года, пока не передал в 1829/30 г. Н.Д.Брашману, однако, оставив за собой гидростатику и гидравлику еще на 4 года (с 1829/30 г. до 1832/33 г. включительно).

Чтение математики он продолжал с 1827/28 г., т.е. с первого года своего ректорства, выделив себе сверх механики и математической физики следующие разделы математического анализа: интегральное исчисление, дифференциальные уравнения (на II и III курсах), уравнения в частных производных второго порядка и вариационное исчисление (сначала на III, затем на IV курсе). Он читал впоследствии эти математические курсы ежегодно[30], кончая 1844/45 г., допустив перерыв лишь с 1829/30 г. по 1832/33 г., когда ему снова пришлось вести опытную физику, и в 1836/37 г., когда он совершил длительную поездку в Петербург.

Лобачевский как преподаватель и как ректор всемерно способствовал тому, чтобы превратить Казанский университет в подлинное научно-учебное заведение. В своих лекциях он знакомил студентов с подлинной наукой, без примеси каких-либо ханжеских религиозно-мистических присловий, которые в угоду Магницкому допускали многие, например, профессор Г.Б.Никольский и даже И.М.Симонов. Он расширял кругозор своих слушателей, сообщая им новейшие научные достижения, и вообще старался вовлечь их в сферу современных научных исследований, систематически используя научную журнальную литературу.

Взгляды Лобачевского на задачи и своеобразие университетского образования отражены, в частности, в его записке от 12 ноября 1836 г. об учебных заведениях Петербурга (он осматривал их в то время), представленной им министру народного просвещения (см. [7, № 44]). Он пишет: *“...высшая ступень образованности приобретается самым способным юношеством только в университете или в равных с ним заведениях”*, причем она *“заключается в тех познаниях, которые могут быть приобретаемы только с особенной природной способностью”*. Но, конечно, студент должен получить при этом также некоторые понятия о всех науках и сведения, необходимые для каждого. Процесс развития студента, его превращение в творческого ученого и просветителя он описывает следующим образом: в университете *“воспитанник, выбрав какой-нибудь род занятий более по своим способностям..., следуя природной наклонности упражняет отличительные свои дарования и, наконец, украсив их общими понятиями о других науках, посвящает себя тому предмету, которому должен быть уже навсегда предан, как любимому занятию в жизни и с тем, чтобы оставаться в числе ученых, в числе представителей просвещения по всему государству, во всех его сословиях и званиях”*.

В этом высказывании отчетливо отразились и особенности биографии Лобачевского, и те установки, которыми он руководствовался как ректор и преподаватель, поставив перед собой благородную цель – воспитывать талантливую молодежь *“во всех ... сословиях и званиях”*, будущих деятелей науки и образования, столь необходимых обществу.

В своих лекциях он всегда опирался как на научные мемуары и монографии классиков (Даламбер, Лагранж, Лаплас, Лежандр, Гаусс), так и на новейшие в те годы исследования (Фурье, Коши, Френель, Ампер и др.). Особенно часто он использовал передовой для того времени опыт преподавания физико-математических наук, накопленный французской научной политехнической школой, рекомендуя учебные руководства Монжа, Пуассона, Лакруа, Коши и др. При этом, как уже мы упоминали, в своей педагогической работе он проявлял самостоятельность, оригинальность подхода и чаще всего не пользовался каким-либо одним готовым руководством, а читал лекции, как тогда говорили, “по своим тетрадям”. Для него характерны углубленный анализ основных понятий, стремление добиться особой четкости в началах науки и тщательно продуманный план построения курса.

Педагогический метод Лобачевского и некоторые используемые им приемы подачи материала ярко обрисованы его учеником и преемником по кафедре А.Ф.Поповым в “Воспоминаниях о службе и трудах профессора Казанского университета Н.И.Лобачевского”. Многое здесь представляется даже читателю нашего времени остро современным и передовым. *“... Профессор Лобачевский умел быть глубокомысленным или увлекательным, смотря по предмету изложения. Между тем как в сочинениях своих он отличался слогом сжатым и не всегда ясным, в аудитории он заботился об изложении со всею ясностью, решая сначала задачи по способу синтетическому, а потом доказывая общие предложения по способу аналитическому. Он мало заботился о механизме счета, но всего более о точности понятия. Он чертил на доске не скоро, старательно, формулы писал красиво, дабы воображение слушателя воспроизводило с удовольствием предметы преподавания; любил более сам учить, нежели излагать по авторам, предоставляя слушателям самим познакомиться с подробностями ученой литературы”* (Учен. зап. Казанского ун-та, 1857, кн. 4, с. 153 – 159) [7, № 620].

Лобачевский не одобрял у студентов механического заучивания материала и иногда с неудовольствием останавливал на экзамене студента, бойко заполнявшего формулами всю доску. Зато часто ему было достаточно ответа в нескольких словах. Он требовал безукоризненной точности выражений и особенно ценил способность самостоятельного суждения. И хотя его методологический подход и педагогические воззрения не получили официального одобрения и остались неизвестными преподавателям физико-математических наук других университетов (он не публиковал статей на эту тему), они практически воздействовали на ход преподавания в Казанском университете не только в течение многолетней личной педагогической работы Лобачевского, но и позднее[31]. Поэтому не только ректорская, но и педагогическая деятельность Лобачевского сыграла немалую роль в повышении уровня преподавания, в улучшении подготовки выпускаемых специалистов, в преобразовании бывшего вначале слабым и неразвитым Казанского университета в один из лучших университетов России.

НАЧАЛО РЕКТОРСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ. РЕЧЬ О ВАЖНЕЙШИХ ПРЕДМЕТАХ ВОСПИТАНИЯ

В те дни 1826 г., когда Лобачевский представил, а затем и читал свой доклад, карьера попечителя Казанского учебного округа, лицемерного святоши Магницкого, закончилась.

Как известно, после смерти Александра I вместо наследника Константина на престол вступил его младший брат Николай. Произошло восстание декабристов. Магницкий в дни междуцарствия в поисках новых высоких покровителей маневрировал неудачно и вызвал даже подозрение в принадлежности к декабристам. И если это подозрение вскоре отпало, то сказалась теперь уже неугодная новым властям его мистико-христианская направленность и, что, может быть, еще важнее, его мелкие столкновения с Николаем, которые он себе позволил в прежние годы, никак не ожидая, что тот займет престол.

В январе – феврале 1826 г. генерал-майором Желтухиным была проведена ревизия дел попечителя и проверка состояния университета. Выявились многие упущения и недостатки, и Магницкий был 6 мая 1826 г. уволен от должности, а затем предан суду сената.

Новый попечитель М.Н.Мусин-Пушкин, назначенный 24 февраля 1827 г., был помещиком Казанской губернии. Он не отличался гуманными взглядами или широким образованием. Воспитывался и учился он в домашних условиях и в 1810 г. сдал экзамены при Казанском университете, дававшие право лицам, не имеющим государственного высшего образования, занимать должности высокого класса. Затем он проходил военную службу и участвовал в походах 1812 – 1814 гг. По свидетельствам современников, в обращении он был груб, но не жесток, горяч и деспотичен, но отходчив и справедлив. Естественно, что как попечитель М.Н.Мусин-Пушкин был заинтересован в повышении уровня университетской работы.

О причинах, побудивших его при выборе ректора остановиться на кандидатуре Лобачевского, можно высказать следующие соображения. В качестве ректора ему был нужен ученый, пользующийся уважением своих коллег, преданный идее развития и улучшения университета и способный энергично действовать в этом направлении. Нет сомнений, что ему было известно донесение П.Ф.Желтухина от 10 марта 1826 г. министру народного просвещения о произведенной ревизии, в котором несколько раз упоминается Н.И.Лобачевский, в отдельные годы проводивший работу по трем кафедрам – математики, физики, астрономии. Он неоднократно избирался деканом, выполнял ряд поручений по устройству библиотеки и научных кабинетов, был активным участником строительного комитета и его председателем. Называя профессоров, пользующихся всеобщим уважением публики и отличающихся познаниями и поведением, ревизор поместил его фамилию на первом месте.

Таким образом, М.Н.Мусин-Пушкин имел все основания видеть в Лобачевском вполне подходящую кандидатуру на пост ректора, более подходящую, чем действовавший в то время профессор К.Ф.Фукс, обладавший, правда, многими достоинствами как человек и ученый, но безвольный, не умевший навести порядок даже на заседаниях Совета университета и притом целиком подпавший в предыдущие годы под влияние Магницкого. Поэтому новый попечитель, явившись в Казань, организовал досрочные выборы ректора. Очевидно он проводил предварительно конфиденциальные переговоры с Лобачевским и другими членами Совета. Лобачевский не сразу дал согласие. Оторваться от научных занятий, когда создавались идеи величайшей важности, было нелегко. Но его привлекла возможность, став ректором, активно участвовать в улучшении Казанского университета и таким образом выполнить общественный долг ученого, содействовать всеми силами развитию науки и высшего образования. В конце концов он дал согласие. Баллотировка состоялась 3 мая 1827 г., и Лобачевский был избран на трехлетний срок (он получил 11 голосов “за” и 3 “против”; профессор Г.Б.Никольский получил 7 “за” и 7 “против”).

Когда кончился первый год его ректорства, Лобачевский произнес 5 июля 1828 г. на торжественном акте, посвященном выпуску студентов, замечательную “Речь о важнейших предметах воспитания” (см. [7, №343; 2; 6]), это было программное высказывание нового ректора о принципах и направлении своей деятельности. В “Речи” нашли отражение широкие взгляды Н.И.Лобачевского на цели и значение воспитания и образования, его понимание методов научного познания, назначения и роли ученого в жизни общества. Здесь также выражены его истинные надежды на более благоприятные условия развития науки и образования в России в будущем, возникшие в связи с изменениями, только что происшедшими в жизни университета.

Семилетний период попечительства Магницкого тяжело сказался на жизни университета. Малейшие признаки свободомыслия подавлялись. За жизнью студентов и преподавателей был установлен постоянный церковно-полицейский надзор. Инструкции обязывали вести преподавание "в духе строгого благочестия", подчиняя науку религиозным воззрениям. И хотя определенное расширение материальной части университета и осуществлялось (строительство главного корпуса, оборудование кабинетов и небольшой астрономической обсерватории, приобретение научной литературы), но в целом уровень научной жизни и преподавания упал, так как сразу было уволено 9 профессоров и, опасаясь новых репрессий, многие профессора и преподаватели уехали или подчинились нелепым инструкциям.

В этой тяжелой обстановке Лобачевский проводил напряженные научные исследования, с увлечением вел преподавание широкого круга физико-математических дисциплин и энергично участвовал в организационной деятельности. Магницкий сначала ценил его как талантливого высокообразованного молодого ученого, прекрасного преподавателя, успешно выполнявшего ряд поручений по приобретению научного оборудования и научной литературы, руководству физико-математическим отделением и по строительству. Но в последний год своего попечительства он изменил отношение к Лобачевскому, обвинял его в дерзости, своеволии, нарушении инструкций, причем решил даже установить особый надзор за его поступками.

Таким образом, освобождение от опеки Магницкого Лобачевский, видимо, воспринял с глубоким удовлетворением, оно позволяло ему надеяться на дальнейшие перемены, благоприятные для развития университета. Это в действительности и осуществилось, по крайней мере в первые два десятилетия. Сложилось парадоксальное положение – начало николаевской эпохи ознаменовалось для Казанского университета наступлением периода раскрепощения, быстрого расцвета, освобождения от нелепых инструкций. Но, конечно, главная заслуга в этом принадлежит самому Лобачевскому.

Таковы были обстоятельства, предшествующие произнесению "Речи о важнейших предметах воспитания", они отчасти объясняют как общий ее тон, так и отдельные высказанные в ней мысли. В своей "Речи" Лобачевский затрагивает в связи с задачами воспитания множество различных вопросов и среди них проблему научного метода познания природы, роль языка, вопросы эстетического и этического воспитания и др.

Краткое изложение содержания "Речи", которое мы далее приводим, неизбежно лишено своеобразия и красоты ораторского слога Лобачевского, весьма эмоционального и изобилующего чеканными формулировками. Но наше изложение поможет читателю, обратившемуся к оригиналу, свободнее ориентироваться в структуре "Речи" и вдумываться в богатство заключенных в ней мыслей. Анализу же стиля и языка этой и других работ Лобачевского должны быть посвящены специальные исследования.

В начале речи Лобачевский, отметив, что он уже год трудится на посту ректора, вспоминает, как нелегко ему было оторваться от научных занятий. Он принял должность ректора, лишь подчиняясь мнению товарищей и стремясь принести пользу университету. Он жалуется на недостаточность своих сил, но его ободряет улучшение обстоятельств и внимание попечителя. Называя протекший год годом испытания, он надеется, что следующий будет годом исполнения, а третий – годом успеха ("торжества моего") и просит критики и советов по поводу высказываемых им далее принципов воспитания.

Затем он останавливается на роли воспитания и образования, преобразующих дикого человека в гармонично развитого просвещенного члена общества. Ничто не должно подавляться, даже страсти полезны в обществе, только их направление может быть вредно. Касаясь понятий инстинкта, ума и разума, Лобачевский характеризует гений как соединение инстинкта (здесь, по-видимому, подразумевается то, что мы называем интуицией) с умом и ставит задачу перед воспитателями – открыть гениальность в юноше, обогатить его познаниями, а далее дать ему свободу в его творчестве.

Замечательна характеристика разума, т.е. логического мышления, включающая положение о познаваемости мира: *"Разум, это значит, известные начала суждения, в которых как бы отпечатались первые действующие причины Вселенной и которые соглашают таким образом все наши заключения с явлениями в природе, где противоречия существовать не могут"*. Особо подчеркивается значение языка в развитии просвещения. Необычайные успехи математических наук поставлены в связь с созданием и использованием специальной символики, т.е. как бы языков различных исчислений.

Как примечательное достижение научной мысли охарактеризован *"прямой метод научного познания"*. Его *"указал нам знаменитый Бакон"* (Ф.Бэкон). *"Оставьте, говорил он, трудиться напрасно, стараясь извлечь из одного разума всю мудрость; спрашивайте природу, она хранит все истины и на вопросы ваши будет отвечать вам непременно и удовлетворительно"* (эксперимент – критерий истины). Гений Декарта разрушил схоластическую науку и теперь *"едва тень древней схоластики бродит по университету"*[32].

Далее обрисовано реальное направление университетского образования и преимущества общественного воспитания перед домашним. Задачи воспитания Лобачевский понимает очень широко. Он стремится воспитать всесторонне развитого, жизнелюбивого человека, которому доступно и понимание красоты. Он говорит, что овладение специальными знаниями ("образование умственное") еще не завершает воспитания, так как человек *"еще должен учиться уметь наслаждаться жизнию"*. Поэтому юноше необходимо прививать широкую общую культуру и воспитывать эстетическое чувство ("образованность вкуса"). Только тогда он воспримет жизнь в ее движении, будет постоянно увлечен ее новизной, найдет прекрасное в этом движении, в колебаниях противоборствующих сил, в восприятии то веселого, то печального.

Лобачевский сурово осуждал невежество: *"Мертвою, прямою дорогою провожает оно жизнь от колыбели к могиле"*. И если у крестьян или ремесленников чередование необходимого изнурительного труда и отдыха еще "услаждает жизнь", то у невежд-крепостников [33] жизнь полностью теряет свое достоинство. Лобачевский восклицает: *"Но вы, которых существование несправедливый случай обратил в тяжелый налог другим; вы, которых ум отупел и чувство заглохло, вы не наслаждаетесь жизнию. Для вас мертва Природа, чужды красоты Поэзии, лишена прелести и великолепия Архитектура, незанимательна История Веков"*. И его радует мысль, что *"из Университета не выйдут подобные произведения растительной природы, и даже не войдут сюда"*.

По Лобачевскому, человеку свойствен дух соревнования, желание превосходить других. И стремление ума возвыситься и прославиться является движущей силой бесконечного совершенствования человечества.

Касаясь вопросов жизни и смерти, Лобачевский говорит, что теперь, когда он *"переступил через вершину... жизни"*, он воспринимает с особой остротой все явления органической природы. Он вскрывает диалектику жизни и смерти, ярко и эмоционально описывая процесс: растение – зерно – растение. Привлекая образ яблока, подтачиваемого червем, он требует от воспитателей оградить юношество от пороков, которые подобно червю сокращают жизнь. Но как преодолеть ужас смерти, *"этой бездны все поглощающей"*, ибо сознание неизбежности смерти может отравить человеку его существование. Лобачевский видит выход в пробуждении с юных лет *"любви к отечеству"* и *"истинного понятия о чести"*, т.е. высоких идеалов, которые будут способствовать проявлению творческого начала и дадут силу *"торжествовать над ужасом смерти"*.

Лобачевский касается и вопросов этики. Будучи вынужден своей должностью (ректор) и обстоятельствами (актовая речь) связать хотя бы внешне вопросы морали с положениями христианской религии, он упоминает "премудрость Творца", проявившуюся в том, что человеку свойственна не только любовь к самому себе, но и любовь к ближнему. В чувстве любви к ближнему Лобачевский видит основу общественной природы человека, возможность его нравственного воспитания. Он упрекает философов, которые, выявив роль любви к себе в развитии общества, забыли о роли любви к ближнему (Дюкло, Ларошфуко, Гельвеций), причем некоторые из них (Гоббс, Гельвеций) даже отрицали, что "человек рожден для общества".

Нравственность, как полагает Лобачевский, лучше воспитывать не рассуждениями, а с помощью живых примеров. Обращаясь к студентам, Лобачевский говорит, что примеры бескорыстной любви к ближнему и желания добра они видели у своих наставников, обучавших их и прививавших им высокие и добрые чувства, и хотя сейчас воспитанники еще не в состоянии оценить эти слова из-за множества впечатлений и недостатка жизненного опыта, но и для них *"придет время, когда на блеске настоящего вдруг явится прошедшее с обворожительной прелестью своего туска, подобно нежной, затуманенной резьбе на ярком золоте, ..."* и тогда они вспомнят с благодарностью годы учения и своих наставников. Основная мысль заключения "Речи": *"...Вы счастливее меня, родившись позже ..., ибо счастливейшие дни России впереди"*,– выражает подлинные надежды и чувства Лобачевского.

Переходя к оценке "Речи о важнейших предметах воспитания" Лобачевского, мы должны признать, что это – замечательный памятник педагогической мысли, исключительно богатый содержанием и отражающий многосторонний мир интересов ученого. Лобачевский здесь выступает прежде всего как воспитатель юношества. Нет сомнений, что он в многообразии своих обязанностей и устремлений выделял как основное – творческую научную деятельность и деятельность воспитательную. Эта последняя воспринималась им с исключительной широтой и охватывала все стороны формирующейся личности молодого человека.

От студента Лобачевский не только требовал приобретения высокой квалификации по избранной им специальности, но, подчеркивая общественную роль образования, стремился увлечь юношу патриотическим идеалом ученого-гражданина, который *"высокими познаниями составляет честь и славу своего отечества"*.

Образование не должно ограничиваться приобретением специальных научных знаний. Лобачевский требует воспитания всесторонне развитой личности. При этом никакие способности не должны быть подавлены, а наоборот – развиты и усовершенствованы, специальная подготовка должна гармонически сочетаться с общим развитием и с освоением эстетической и этической культуры.

Изложенные в “Речи” широкие взгляды на преподавание и воспитание выработаны Лобачевским, конечно, прежде всего на основе его личного, уже весьма значительного к 1828 г. опыта. Сначала это был пассивный опыт юноши, проходившего обучение на казенном содержании в гимназии и в университете, с увлечением овладевавшего физико-математическими науками и настойчиво развивавшего свои способности в соревновании с товарищами. Его блестящие успехи не раз были отмечены его учителями, но вместе с тем он перенес и немало неприятностей, связанных с формальными и бездушными методами воспитания, применявшимися администрацией. Затем приобретался активный опыт преподавания (см. с. 26 – 31).

Но, конечно, определенное влияние на его педагогические воззрения оказали и его университетские учителя – профессора М.Х.Бартельс и Ф.К.Броннер. Броннер особенно много сил и внимания уделял воспитанию студентов и магистров университета, руководил педагогической работой последних. Его жизнь до приезда в Казань была чрезвычайно богата событиями. Сын бедняка, воспитанник иезуитской семинарии в немецком городке, а затем монах, он на средства Ордена с увлечением совершенствовался в математических науках и тогда же увлекся поэзией и просветительской философией. В 1784 г. он бежал из монастыря в Швейцарию, потом вернулся и бежал в 1793 г. туда вторично, чтобы проникнуть в революционную Францию. После ряда неудач он опять в Цюрихе, работает в газете, а с 1804 г. в кантональной школе Аарау преподает (вместе с Бартельсом) математические предметы. Возможно, что именно по его рекомендациям магистр Лобачевский начинал свое знакомство с социально-философскими и моралистскими произведениями французских просветителей, нередко упоминаемыми в его речи.

Несомненно, что “Речь” Лобачевского является значительным произведением русской педагогической мысли. Написанная выразительным и сжатым языком она и в наши дни увлекает читателя богатством чувств и мыслей.

Почти 20 лет Лобачевский стоял во главе университета (1827 – 1846 гг.), являясь его ректором, неизменно переизбираясь Советом на очередные сроки. За эти годы он добился подлинного расцвета Казанского университета, бывшего ранее в очень тяжелом состоянии. Семь лет попечительства Магницкого, установившего церковно-полицейский надзор за преподавателями и студентами, приславшего проникнутые ханжески религиозным духом инструкции преподавателям и ректору, привели к печальным последствиям. Уровень преподавания (особенно на гуманитарных факультетах) упал, многие кафедры после увольнения ряда профессоров оставались незамещенными, число студентов резко сократилось. Правда, материальная часть была несколько улучшена. Университет получил собственное здание (строительство главного корпуса было закончено в 1825 г.), Лобачевский и Симонов закупили физическое и астрономическое оборудование, но перспектив плодотворного развития научно-учебной жизни не было.

Ректорство Лобачевского коренным образом изменило жизнь университета. Его энергичная целенаправленная деятельность привела к тому, что, несмотря на военно-дворянские реакционные установки николаевского режима, Казанский университет стал развиваться, расширяться и превратился в одно из лучших научно-учебных заведений России с профессорско-преподавательским составом, представлявшим широкий круг наук*.

НАУЧНЫЕ ТРУДЫ, НЕ ОТНОСЯЩИЕСЯ К НОВОЙ ГЕОМЕТРИИ. ВЗГЛЯДЫ ЛОБАЧЕВСКОГО НА МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД И ЕГО ЗНАЧЕНИЕ

Научные интересы Лобачевского в области физико-математических наук были весьма широки. Его научные исследования не исчерпываются работами по новой геометрии. В различные годы, кроме математических курсов, он вел также преподавание механики, физики и астрономии (см. с. 26 – 31). Он был глубоко осведомлен в этих науках, внимательно следил за современной научной литературой, и ему принадлежит несколько статей в этой области: две статьи об акустическом резонансе (1823, 1828), Примечания к статье А.Купфера “О температуре почвы” (1829), “Исследование о движении твердого тела” (1834) [1, т. 5], “Отчет о наблюдении полного затмения Солнца” (1842) [1, т. 5], где он высказал ценные мысли о необходимости сочетать волновую и корпускулярную теории света, и “Разбор докторской диссертации А.Ф.Попова об уравнениях гидродинамики” (1845) [1, т. 5]. В дальнейшем мы коснемся содержания только математических его трудов.

Помимо идей новой геометрии он стремится осуществить в своих геометрических работах оригинальный подход к самым первым основным геометрическим понятиям. Мы уже упоминали, что он критиковал Евклида за то, что тот принимал в качестве исходных такие абстрактные понятия, как точка, линия и поверхность. В соответствии со своими материалистическими воззрениями на природу Лобачевский полагал, что начальные понятия должны быть более близки с непосредственно воспринимаемым нами объектам, к материальным телам. Они должны быть “приобретенными” с помощью наших чувств, и, только опираясь на эти первые понятия, следует вводить более отвлеченные “произведенные” понятия, так сказать абстракции второй ступени.

Аксиоматический метод еще не был тогда достаточно разработан; он и сложился лишь после и в значительной степени на основе появления неевклидовых геометрий (см. с. 51 – 59), поэтому в этой оригинальной попытке приблизить начальные понятия к природе имеется ряд неясностей и пробелов. Вместе с тем это была попытка ввести в качестве начальных некоторые топологические понятия, что свидетельствует и о положительных достижениях в стремлении Лобачевского дойти до самых глубин, до изначальных основ геометрии. Лобачевский полагал, что если приблизить начала геометрии к самой природе, то затем все выводы, полученные силой логического суждения, не смогут отклоняться от действительности, так как в разуме *“как бы отпечатались первые действующие причины Вселенной, которые соглашают ... все наши заключения с явлениями в природе”* (см. с. 35). Этот интерес к самым начальным математическим понятиям, к поискам усовершенствования начал проявился и в его работах по математическому анализу и алгебре.

Он опубликовал три работы по сходимости бесконечных рядов (1834, 1835, 1841 гг.). Работа 1841 г. получила, как ранее и его геометрический труд, отрицательный отзыв академика М.В.Остроградского, рассмотревшего ее по поручению и министра, и президента Академии наук [7, №479, 480]. В этих трудах он проявил себя как исследователь принципиальных вопросов в области анализа, занимался актуальными проблемами своего времени. Он отчетливо разграничил понятие непрерывности и дифференцируемости, проявил глубокое понимание точного смысла понятия функция, а в своих доказательствах пользовался введенным в науку позднее понятием равномерной непрерывности. Он нашел новый признак сходимости знакоположительных рядов, доказал при весьма общих условиях теорему о разложении функции в ряд Фурье и получил некоторые результаты, предвосхищавшие дальнейшее развитие математического анализа (см. [38, с. 79 – 86] и “Историко-математические исследования”, 1949, вып. 2, с. 9 – 71).

Одна из его работ относится к теории вероятностей (1842). В ней исследована вероятность средних результатов, полученных из повторных наблюдений, иначе говоря, найден закон распределения среднего арифметического взаимно независимых равномерно распределенных случайных величин. Эти результаты, по словам академика А.Н.Колмогорова, представляют интерес и для настоящего времени [1, т. 5, с. 327 – 348].

В области алгебры Лобачевскому принадлежит статья о понижении степени двучленного уравнения (1834 г.) и большое учебное пособие для учителей гимназии и студентов “Алгебра или вычисление конечных”, изданное им тоже в 1834 г. в типографии университета.

Первоначально Лобачевским была задумана и подготовлена еще в 1823 г. учебная книга по алгебре для гимназии. (Он сам вел преподавание в гимназии). Рукопись в окончательном виде была представлена на факультет в августе 1824 г. для напечатания на казенный счет и введения ее в гимназиях. Однако по разным причинам (задержка одного отзыва, наступление событий 1825 г. и др.) издание не состоялось. Осенью 1826 г. Лобачевский взял рукопись обратно, выразив сожаление о напрасно затраченном труде (рукопись сохранилась и находится в библиотеке Геометрического кабинета Казанского университета. Она опубликована [1, т. 4, с. 366 – 426]).

“Алгебра” 1834 г. (цензуру прошла в 1832 г. [1, т. 4, с. 5–365]) представляет собой результат переработки первоначального текста учебника и внесения существенных дополнений к нему, относящихся к высшей алгебре. По существу это – первый русский учебник высшей алгебры. Помимо своеобразного изложения известного материала и некоторых усовершенствований в доказательствах он включает ряд совершенно оригинальных результатов.

Алгебра рассматривается Лобачевским как предварительное введение в математический анализ, как наука о конечном (хотя он и применяет здесь бесконечные ряды). И прежде всего алгебра *“предписывает правила для счета всех чисел”*. В соответствии с этой последней установкой, близкой к современной, первые восемь глав книги посвящены операциям с числами целыми и дробными и исследованию их свойств. Далее рассмотрены системы уравнений первой степени, а также решения их в целых числах; затем – степени и корни, включая операции с комплексными числами; логарифмы, их свойства и составление логарифмических таблиц (с помощью рядов); аналитическое введение тригонометрических функций; конечные разности и формулы суммирования (некоторые оригинальные), двучленные уравнения и “всякие” (т.е. высших степеней) алгебраические уравнения. Всего семнадцать глав, причем объем последней главы, возможно наиболее интересной, составляет почти одну треть книги.

Мы отметим наиболее оригинальные черты этой книги. Во-первых, особое внимание здесь уделено операциям над числами и их свойствам. Далее приведен один из способов введения определителей, возникающих при решении систем, очень близких к современному (определители использованы впервые в мировой учебной литературе). Затем следует отметить чисто аналитическое введение тригонометрических функций. Это объясняется тем, что Лобачевскому важно было показать, что они могут быть определены независимо от евклидовой геометрии. Изложен оригинальный метод, позволяющий понижать степень у некоторых видов двучленных уравнений. Наконец, в последней главе найден новый способ приближенного вычисления корней алгебраических уравнений. Впоследствии он получил несправедливо название способа Греффе, хотя работа последнего вышла в 1837 г. (первый вариант в 1833 г.). Правда, до Лобачевского и Греффе он был предложен бельгийским математиком Данделеном в его статье 1826 г. Поэтому, называя этот метод, справедливо будет упоминать имена всех трех ученых: Данделена, Лобачевского и Греффе, разработавших его независимо друг от друга.

Кроме опубликованных перечисленных выше работ, в библиотеке Геометрического кабинета Казанского университета хранятся студенческие записи лекций Лобачевского за разные годы по арифметике, алгебре, геометрии, дифференциальному исчислению, дифференциальным уравнениям и механике. Имеется также большая "Записная книга" (или "Тетрадь Лобачевского"), заполненная мелко написанными математическими текстами рукой Лобачевского и начатая, по-видимому, в 1821 г. В ней находятся выписки из научной литературы, расчеты, связанные с подготовкой к лекциям и самостоятельные исследования, преимущественно по алгебре (все без объяснений). Кроме того, в библиотеке хранится несколько десятков отдельных листочков с заметками по физике, механике, астрономии, математике, а также и другого рода, написанными тоже рукой Лобачевского (в частности, конспективное изложение формальной логики). Это – черновые выкладки, отрывки из конспектов лекций для студентов, фрагменты самостоятельных исследований, копии стихотворений и т.п. Все эти материалы (или их описание), а также учебные планы и программы ("Обозрения преподаваний" Лобачевского) опубликованы в книге "Н.И.Лобачевский. Научно-педагогическое наследие. Руководство Казанским университетом. Фрагменты. Письма" [6], которая как бы завершает Полное собрание его сочинений, пять томов которого вышли в 1946 – 1951 гг.

Широкий круг научных интересов Лобачевского способствовал выработке им целостного материалистического мировоззрения и позволил ему высказать имеющие важное значение мысли о роли математического метода в исследовании природы.

Так, построение новой математической теории, какой являлась система "воображаемой геометрии", рассматривалось им как новая возможность более глубокого проникновения в закономерности объективного мира. В соответствии с этим он и проверял с помощью данных астрономических наблюдений применимость своей геометрии в физическом пространстве. Однако убедившись, что евклидова геометрия практически достаточно точна, и показав, как можно применить новую геометрию в математическом анализе, он как материалист высказывает уверенность, что его геометрия в дальнейшем еще потребуется либо *"в тесной сфере молекулярных притяжений"*, либо *"за пределами видимого мира"*, т.е. при расширении доступных изучению протяжений космоса, что в известном смысле подтвердилось в наше время (см. с. 63 – 68). Известны также его замечательные высказывания о неразрывных связях между движущейся материей и свойствами пространства. Эти связи получили конкретное выражение лишь после создания Эйнштейном частной (1905 г.) и общей (1916 г.) теорий относительности (см. с. 61). Лобачевский писал: *"В природе мы познаем собственно только движение, без которого чувственные впечатления невозможны. Итак, все прочие понятия, например, геометрические, произведены нашим умом искусственно, будучи взяты в свойствах движения; а потому пространство само собой, отдельно, для нас не существует... Силы все производят одни: движение, скорость, время, массу, даже расстояния и углы"* [1, т. 2, с. 158 – 160].

От математической науки Лобачевский требует, *"чтобы она стала на твердом основании, чтобы строгость и ясность сохранялись в самых ее началах, так как они делаются первым ее достоинством в продолжении"* [1, т. 4, с. 370]. Он четко высказывается против идеалистической трактовки начал математики. *"В основу математических наук могут быть приняты все понятия, каковы бы они ни были, приобретенные из природы"*[34] [7, № 244, с. 204–205]. Поэтому он и предложил принять в качестве исходного геометрического понятия "прикосновение" и, опираясь на него, ввести понятие "геометрического тела". Он был твердо убежден, что *"все математические начала, которые думают произвести из самого разума, независимо от вещей мира, останутся бесполезными для математики"*. В виде примера таких бесполезных начал приведены: актуальные бесконечно-малые, основания учения о движении Канта, принцип разнородности линий с углами (т.е. требование существования подобных фигур), сравнение бесконечных площадей и др. (см. там же). Он дает сжатую характеристику дедуктивного построения физико-математических наук: *“...в начале их полагаются те понятия, откуда производится все учение силой нашего суждения”* (см. там же).

Однако, по Лобачевскому, логический вывод – это совсем не субъективное построение, в нем отражены закономерности и связи объективного мира, а именно, как он сказал в “Речи”, в началах суждения, т.е. в законах логики *“как бы отпечатались первые действующие причины Вселенной, которые и соглашают, таким образом, все наши заключения с явлениями в Природе”*. Это высказывание близко известному высказыванию Ф.Энгельса о познаваемости мира, поскольку мышление и познание – продукт мозга, а мозг – продукт и часть природы.

Лобачевский высоко оценивает успехи физико-математических наук, называя их *“славой нынешних веков, торжеством ума человеческого”*. Эти успехи *“справедливо удивляют нас, заставляют признаться, что уму человеческому предоставлено исключительно познавать сего рода истины. Надобно согласиться и с тем, что математики открыли прямые средства к приобретению познаний”*. И далее он вкладывает в уста Ф.Бэкона уже процитированную нами (см. с. 35) сжатую характеристику современного метода естествознания, опирающегося на экспериментальную проверку теории. Высоко оценивая вклад Декарта, он отмечает, что *“мы живем уже в такие времена, когда едва тень древней схоластики бродит по университетам... Здесь учат тому, что на самом деле существует, а не тому, что изобретено одним праздным умом”*.

В этих высказываниях ясно проступает крайне отрицательное отношение Лобачевского к некоторым имевшим в то время место попыткам псевдонаучных натурфилософских построений с помощью надуманных метафизических принципов и вообще его остро критические позиции в отношении к современной ему идеалистической философии, преподаваемой в университетах. В другом месте (см. [7, № 244, с. 205]) он прямо подчеркивал, что напрасно было бы искать решение трудностей построения математической науки в философии (подразумевая, конечно, современную ему кантианскую философию и особенно шеллингианскую натурфилософию, которая бралась за решение проблем всех естественных наук): *“нахожу также бесполезным ...искать к ним ключа в философии. Математика должна быть совершенно независима от сей науки”*.

Лобачевский справедливо указывает, что возможность использования математических методов в какой-либо из наук о природе – это свидетельство ее зрелости, когда качественное описание – пройденный этап, когда уже выявлены понятия и связи достаточно общие и определенные. *“Все естественные науки силятся встать на ту высокую ступень совершенства, на которой последует их соединение с Математикой; и со времени сего соединения их успехи пойдут быстрыми шагами вперед. Это случилось уже с Физикой, в недавнее время с Минералогией, и есть надежда того же ожидать для всей Химии”... “Всему основанием служит справедливое понятие о вещах, которое не оставляет вести Математика через все его вычисления. После чего нет уже явлений природы, которых бы он не мог изъяснить; нет явлений, в которых бы он не мог предсказать и определить с точностью и время и меру”.* И далее он особо подчеркивает, что без математики наука не сможет проникнуть достаточно глубоко в сущность изучаемых явлений. *“...Но то однако ж правда, что ум, приученный к вычислениям, далеко продолжает еще итти за ту границу, которую не переступит ум, не посвященный в таинства науки чисел”*. Так ярко он выразил фундаментальное значение математического метода в исследовании природы [35].

СЕМЕЙНАЯ ЖИЗНЬ. УХОД ИЗ УНИВЕРСИТЕТА. ПОСЛЕДНИЕ ГОДЫ ЖИЗНИ

Лобачевский женился поздно, в 1832 г., когда ему шел уже сороковой год. Благодаря жене – Варваре Алексеевне Моисеевой – он оказался в родственных связях с попечителем (мать М.Н.Мусина-Пушкина была сестрой матери Варвары Алексеевны). Это обстоятельство несомненно укрепило его и до этого прекрасные служебные отношения с попечителем. Накануне свадьбы он писал И.Е.Великопольскому, брату своей невесты (по матери), что уже теперь волнения за здоровье любимой жены и ожидаемых в будущем детей *“бросают густую черную тень на светлые призраки будущей жизни”*. Эти опасения, как мы знаем, подтвердились. В 1840 г. жена и оба сына очень тяжело болели. Из большого числа детей (по одним сведениям их было 15 человек) осталось лишь 3 сына и 4 дочери, так как остальные умерли в младенческом возрасте. А в 1852 г. скончался и его старший сын.

По воспоминаниям современников (см. [7, с. 635]), семейная жизнь Лобачевских сложилась не очень счастливо – характеры их были различны. У жены был живой и вспыльчивый нрав, и иногда возникали разногласия и ссоры, хотя Лобачевский в эти годы всегда проявлял хладнокровие и рассудительность и смягчал ее вспышки.

Дом Лобачевских был открыт для гостей, нередко по вечерам собиралось шумное общество, шла игра в карты. Сам Лобачевский очень редко играл. (*“Бука-Лобачевский”, “человек не нонишнего света”,* – писала про него одна дама. – См. [7, № 408]).

В последние годы жизни Лобачевского его отстранение от университета, ухудшение здоровья, семейные несчастия и начавшееся разорение – все это резко изменило уклад семейной жизни. Он оказался в одиночестве. Только несколько профессоров, его прежних ближайших сотрудников и бывших учеников не переставали его посещать.

В качестве приданого Лобачевские получили два небольших имения в отдаленных губерниях и дом в Казани (все это числилось в собственности жены). Имения было решено продать и купить другое, удобно расположенное, т.е. находящееся недалеко от Казани, чтобы можно было непосредственно организовывать в нем ведение хозяйства. Подходящее имение было найдено и куплено в 1840 г. Это была расположенная на Волге “Беловолжская слободка” (ныне район поселка Козловка в Чувашской АССР). Эта покупка прошла нелегко, так как Лобачевскому пришлось взять часть денег в долг.

Как глава семьи Лобачевский должен был вникать во все хозяйственные дела. В имении он стремился вести хозяйство на научной основе, используя различные технические нововведения. У него заметно проявился интерес к экономическим вопросам. Он желал всемерного развития промышленности и сельского хозяйства России. Лобачевский стал одним из инициаторов создания Казанского экономического общества (1839 г.) и был активнейшим его членом, а фактически почти руководителем (см. статью Д.С.Гутмана в “Историко-математических исследованиях”, 1956, вып. 9). Он участвовал в изучении экономики края, в организации выставок сельского хозяйства и промышленности, делал сообщения о тех или иных усовершенствованиях. Неоднократно он высказывался о необходимости введения экономического и профессионального образования, искал пути создания ремесленных и торговых школ, не только для купеческих детей, но и для детей бедноты.

В своем имении он построил дом и флигель, амбары и каретники, каменную ригу и овчарню. Он разводил породистый скот (за образцы мериносовой шерсти в 1850 г. Лобачевский был награжден на Петербургской выставке серебряной медалью), разбил сад, придумал оригинальные ульи, ввел особую систему травосеяния, построил плотину и водяную мельницу. Однако его преследовали неудачи, что вызывало злорадные пересуды соседей. Конечно, при крепостных отношениях и сомнительных управляющих (Лобачевский в одном письме писал, что они *“обыкновенно бывают люди ни к чему не способные”* и, кроме того, *“из разбора бессовестных, бесчестных и предосудительного поведения”*) его рациональные методы ведения хозяйства не могли обеспечить экономический успех. Разорение надвигалось. И.Е.Великопольский, помогавший в 1844 г. продать одно имение, получил за него деньги, но значительную сумму не передал Лобачевским, взяв ее в долг. Будучи страстным игроком и театралом, он вел широкую жизнь в Петербурге и проиграл эти деньги. В итоге и через 5 лет его долг оставался неуплаченным, что сильно сказалось на материальных делах Лобачевского. И имения и дом пришлось заложить, и даже неоднократно.

Между тем, служебное положение Лобачевского изменилось. В 1844 г. стало известно, что Мусина-Пушкина переводят в Петербург попечителем Петербургского учебного округа. Лобачевский лишался прочной опоры, так как именно благодаря поддержке попечителя удавалось делать менее заметными все отклонения от официальной политики. Реакционность николаевского режима усиливалась. Жена Лобачевского в письме к Великопольскому от 18 июня 1844 г. так обрисовала обеспокоенность Лобачевского складывающимся положением: *“...он готовится службу оставить, сами обстоятельства к тому ведут ... При новом порядке дел муж не может оставаться и перейти таким образом в другой период службы, с которым Университет скорее может итти назад, нежели вперед”* [7, № 507]. Было ли здесь выражено внутреннее намерение Лобачевского уйти из университета или опасения вынужденного ухода – неясно. Полной определенности в этот вопрос не вносят и дальнейшие события.

Еще за 3 года до этого письма в 1841 г. исполнилось 25 лет профессорской службы Лобачевского и Симонова. По Уставу они получали звание заслуженного профессора, им назначалась пенсия и они увольнялись из университета. Но Совет мог избрать их же вторично на 5 лет, а после этого по представлению Совета и мнению попечителя министр решал вопрос о дальнейшем продлении их службы. 31 мая 1841 г. состоялось голосование в Совете, и для Лобачевского оно было единогласным (а Симонов получил один голос против). На этом же заседании Совета Лобачевский баллотировался в ректоры и был вновь избран подавляющим большинством (21 голос – за, 5 – против) на следующие 4 года.

После отъезда Мусина-Пушкина (15 апреля 1845 г.) Лобачевскому как ректору было предписано временно управлять учебным округом, а исполнение обязанностей ректора поручили проректору профессору К.К.Фойгту. Между тем, приблизилось окончание сроков ректорства и профессорской деятельности Лобачевского [36]. За четыре дня до баллотировки в Совете Лобачевский написал заявление, в котором просил Совет *"от нового выбора... уволить"*, ссылаясь на наличие других достойных кандидатов (из них был упомянут только К.К.Фойгт). Но на заседании Совета 15 сентября 1845 г. он по единодушной просьбе членов Совета согласился баллотироваться и был единогласно избран ректором на очередное четырехлетие (уже шестое!). Однако, сообщая (как управляющий округом) в Министерство 29 сентября результаты голосования, он вновь просил его от ректорства уволить, а утвердить И.М.Симонова, указывая при этом также и на отличную службу Фойгта, уже исполнявшего тогда обязанности ректора. Но, несмотря на просьбу, Лобачевский был 20 ноября утвержден в должности ректора, а исполнять обязанности ректора стал И.М.Симонов как новый проректор.

Но в следующем году кончался срок профессорской службы Лобачевского и Симонова. Заседание Совета состоялось 5 июня 1846 г., и было принято баллотировкой единогласное решение просить продлить еще срок службы обоим заслуженным профессорам. Однако Лобачевский как управляющий округом направил министру 3 июля 1846 г. свое представление, в котором просьбу Совета в отношении Симонова поддержал, а свою кафедру чистой математики просил передать молодому ученому, учителю гимназии А.Ф.Попову *"...чтобы поощрить [его] далее к занятиям при несомненных его хороших способностях. В силах еще первой молодости, неотвлекаемый, подобно мне другого рода занятиями по службе и обязанностями семейственными, он не замедлит показать себя достойным профессором и встать в кругу самых известных европейских ученых",* – писал Лобачевский [7, № 532].

Он и раньше поддерживал научные труды своего ученика, окончившего университет в 1835 г. с серебряной медалью. Лобачевский был в числе оппонентов на защите Поповым магистерской (1842 г.) и докторской (1845 г.) диссертаций. Подчеркивая важность последней, он опубликовал свой отзыв о ней в 1845 г., озаглавив его так: "Подробный разбор рассуждения, представленного магистром А.Ф.Поповым под названием "Об интегрировании дифференциальных уравнений гидродинамики, приведенных к линейному виду" на степень доктора математики и астрономии".

Надежды Лобачевского впоследствии оправдались. А.Ф.Попов (1815–1879) действительно завоевал европейскую известность и был избран членом-корреспондентом Академии наук (1866 г.).

Представление Лобачевского заканчивалось следующими словами: *"При таких обстоятельствах желание с моей стороны оставаться в должности профессора не могло бы почитаться справедливым..."*

Это благородное решение вызвало следующий ход событий. Лобачевский был уволен указом от 14 августа 1846 г. не только от должности профессора, но и ректора и назначен на вновь учрежденную должность – помощника попечителя (пенсия сохранялась, но специального оклада не было установлено, кроме 800 руб. в год за управление канцелярией). Ректором (после избрания 27 ноября 1846 г.) был утвержден И.М.Симонов. А.Ф.Попов был избран еще в сентябре 1846 г. по настойчивому представлению Лобачевского экстраординарным профессором.

По поводу увольнения Лобачевского необходимо высказать следующие соображения. По Уставу, не будучи профессором, он не мог быть и ректором. Однако из его представления в Министерство неясно, учитывал ли он этот пункт. Не подразумевал ли он, отказываясь от кафедры и указывая на *"другого рода занятия по службе"*, свою должность ректора, в которой ему полагалось быть еще три года? Правда на выборах 1845 г. он вначале просил его от ректорства уволить. Но, ведь, причина могла быть двоякой. Или Лобачевский твердо решил уйти из университета и заняться *"делами семейственными"*, но во время выборов поддался уговорам членов Совета. Однако он вернулся в своем представлении к первому решению (предположение С.Н.Корытникова). Или же его отказ от ректорства был вызван в основном неуверенностью, будут ли после ухода Мусина-Пушкина, с которым он был близок, поддерживать его члены Совета, а также министр, и он хотел испытать и проверить их отношение к своей кандидатуре. Если второе предположение ближе к истине, то увольнение от ректорства было для него особенно тяжелым и, скорее всего, непредвиденным ударом,

После назначения 22 мая 1847 г. нового попечителя генерал-майора В.Л.Молоствова Лобачевский оказался совсем отстраненным от университета, с которым была связана вся его жизнь и который был обязан ему своим развитием. В должности помощника попечителя он имел теперь дело только с училищами и гимназиями. При этом его материальное положение сильно ухудшилось. Между тем организация хозяйства в имении требовала постоянного вложения средств. Семья была большая, и расходы возрастали, а его жалованье сильно сократилось, и, кроме того, он лишился ректорской квартиры.

Тяжелое горе постигло его в 1852 г. – от туберкулеза скончался его любимый старший сын Алексей, студент университета. Второй сын Николай, тоже студент, в следующем году бросил университет и ушел на военную службу. Все это заметно сказалось на здоровье Н.И.Лобачевского. Стали повторяться сердечные приступы с потерей сознания. Но несмотря на болезнь и начавшуюся слепоту, он приходил в университет на экзамены, на торжественные собрания, принимал участие в ученых диспутах при защитах диссертаций (по докторской диссертации А.С.Савельева (1852 г.), по магистерской И.А.Больцани (1853 г.) и др.) (см. [7, с. 650]). В 1855 г. он закончил свой последний труд "Пангеометрию", посвятив его 50-летию университета. Сам писать он уже не мог и диктовал его своим ученикам.

Необходимость оказать материальную помощь Лобачевскому была очевидна. Попечитель Молоствов просил об этом министра и в 1852 г., и в 1855 г., указывая, что за свою 40-летнюю "отлично-усердную службу" Лобачевский заслуживает по крайней мере жалованья за работу в должности помощника попечителя (его преемник по должности сразу стал получать 2000 руб. в год), но всегда получал отказ.

Новый министр А.С.Норов посетил 21 сентября 1855 г. Казань и осматривал университет. Это дало возможность больному и почти ослепшему Лобачевскому лично представиться министру и просить о годовом отпуске и денежной помощи для лечения (эта письменная просьба была поддержана и попечителем) (см. [7, № 587, 588]). Однако министр в своем докладе Александру II просил уволить Лобачевского как бесполезного, оставив ему еще на годовой срок (кроме пенсии) сумму 800 руб., и получил на это согласие.

Несмотря па просьбу умирающего Лобачевского, его все же отчислили со службы. И он пишет слова благодарности за столь жалкие условия увольнения (см. [7, № 593]). Через два дня он, не имея средств на поездку в Москву для лечения, опять просит министра о единовременном пособии для этой цели (см. [7, № 594]).

Наконец, за 12 дней до смерти он получает извещенье, что разрешено выдать ему 1500 руб., и он благодарит министра за *"лестное внимание"*, высказывая надежду, что сможет *"еще быть полезным"* [7, с. 567, № 599]. Но врачи уже были бессильны ему помочь, и 12 (24) февраля 1856 г. он скончался.

РАЗВИТИЕ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ ПОСЛЕ ЛОБАЧЕВСКОГО. СОЗДАНИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИЙ И ПРИЗНАНИЕ ЕГО ИДЕЙ. РАЗРАБОТКА АКСИОМАТИЧЕСКОГО МЕТОДА

При жизни Лобачевского его геометрические идеи, нарушавшие установившуюся на протяжении тысячелетий традицию, не получили признания. Они казались нелепыми, и, как мы знаем, Лобачевский подвергался даже издевательствам и насмешкам. А если некоторые геометры и относились к его идеям сочувственно, то, по-видимому, подобно Гауссу они не решались открыто высказываться, опасаясь *"потревожить гнездо ос"* или *"вызвать крики беотийцев"* [37]. Лишь в последующие десятилетия геометрия Лобачевского нашла поддержку и продолжение, а самого ученого стали считать революционером в науке, совершившим коренные преобразования самых основ математики. Потребовалось дальнейшее развитие математических наук, чтобы стала ясной правильность его исследований, непротиворечивость его геометрии. Хотя признание началось уже через 12 – 15 лет после его смерти, важное значение его идей для дальнейшего развития математики выявилось только к концу XIX в.

Отношение к теории Лобачевского изменилось в значительной степени благодаря исследованиям Ф.Миндинга, математика из Дерпта (ныне Тарту), итальянского математика Е.Бельтрами, английского – А.Кэли, немецкого – Ф.Клейна и французского – А.Пуанкаре. Большую работу по выявлению значения трудов Лобачевского и по распространению его идей проделали Казанский университет и Казанское физико-математическое общество под председательством А.В.Васильева. Широкое признание его идеи получили к 100-летию со дня рождения великого ученого, торжественно отмеченному в 1893 г. Казанским университетом и Обществом?* Обществом тогда же была учреждена по подписке Международная премия имени Лобачевского [38], а в 1896 г. перед зданием университета был воздвигнут памятник. Еще до этого, в 1883 г. и 1886 г., были изданы два тома его геометрических трудов. Однако полное собрание всех его научных исследований было осуществлено лишь после Великой Октябрьской социалистической революции и вышло в пяти томах с 1946 г. по 1951 г. под редакцией В.Ф.Кагана, причем в составлении комментариев приняли участие большая группа советских ученых из Москвы и Казани.

Основным мотивом непризнания геометрии Лобачевского было отсутствие убедительного доказательства ее непротиворечивости. Возникали сомнения, не появится ли в дальнейшем, когда будут делаться все новые и новые выводы и на этом пути возникать новые теоремы, какое-либо противоречие? Не является ли вся эта теория пустой фантазией, которая впоследствии сама себя уничтожит?

Факты, позволившие устранить эти сомнения, были подготовлены теорией поверхностей, начала которой разрабатывались еще Эйлером и Лагранжем, а затем Монжем и его учениками. В трудах Гаусса (1827) эта теория получила новое направление. Он стал рассматривать “внутреннюю геометрию поверхности”, изучающую те свойства фигур на поверхности, которые сохраняются, если поверхность изгибать, т.е. менять ее форму, но без сжатий и растяжений (как нерастяжимую металлическую оболочку, а не как резиновую пленку). К внутренней геометрии поверхности относятся прежде всего следующие понятия и величины: гладкая линия, длина линий, угол между пересекающимися линиями, площадь фигуры, контур которой лежит на поверхности. Так как длины при изгибании сохраняются, то и так называемые геодезические линии (т.е. линии кратчайшей длины в небольшой области) тоже принадлежат внутренней геометрии поверхности. На сфере, например, геодезическими линиями являются большие окружности, на плоскости – прямые.

Гаусс доказал замечательную теорему, названную им самим “великолепной” (egreghium). Он доказал, что полная кривизна *K* поверхности в данной точке не меняется при изгибании, является, как говорят, инвариантом изгибания, хотя при этом главные сечения и их кривизны, конечно, могут меняться [39]. А именно он нашел формулу, выражающую *K* через *E, F, G* и их производные до второго порядка.

Ф.Миндинг продолжил исследования Гаусса и доказал в 1839 г., что кусок поверхности, обладающей постоянной полной кривизной (т.е. одной и той же в каждой точке), способен, изгибаясь, накладываться на поверхность с такой же полной кривизной и передвигаться по ней совершенно свободно, но, вообще говоря, изгибаясь при этом (как плоскость накладывается и двигается по цилиндру). А в 1840 г. Ф.Миндинг вывел тригонометрические соотношения для геодезических треугольников (стороны треугольника – геодезические линии) на поверхностях постоянной отрицательной кривизны [40] (для поверхностей постоянной положительной кривизны получились формулы сферической тригонометрии). Оказалось, что эти формулы можно получить из формул сферической тригонометрии, если радиус сферы заменить чисто мнимым числом (или же тригонометрические функции сторон заменить гиперболическими).

Но Ф.Миндинг не был знаком с работами Лобачевского и поэтому не заметил, что его формулы совпадают с тригонометрическими соотношениями для прямолинейных треугольников в пространстве Лобачевского. Кроме того, Лобачевский в 1840 г. был тяжело болен и, как показывают библиотечные записи, не брал на просмотр очередного тома журнала, в котором напечатана работа Миндинга [29]. Таким образом, ни один из них не заметил, что установлен замечательный факт: ***В евклидовом пространстве на поверхности постоянной отрицательной кривизны геометрия геодезических линий совпадает с планиметрией Лобачевского***.

Только через 28 лет (через 12 лет после смерти Лобачевского) итальянский геометр Е.Бельтрами сопоставил в 1868 г. оба исследования, провел строгие расчеты и подробно развил это истолкование или, как говорят, ***интерпретацию*** (воплощение) геометрии Лобачевского. Поверхности постоянной отрицательной кривизны Бельтрами назвал псевдосферическими. Если их изогнуть в поверхности вращения, то возможны, как показал Миндинг, три типа таких псевдосфер.

Было убедительно доказано, что геометрия Лобачевского выражает свойства определенных криволинейных фигур в пространстве Евклида, а следовательно, она не может иметь противоречий, так как иначе противоречия проявились бы и в евклидовой геометрии. Правда, в доказательстве имелась некоторая неполнота, так как интерпретировалась не вся плоскость Лобачевского, а только ее часть, поскольку на любой псевдосфере имелись ограничивающие ее гладкую часть острые ребра*.

После того, как непротиворечивость геометрии Лобачевского стала для математиков очевидной, идеи неевклидовой геометрии стали оказывать все возрастающее влияние на развитие математики. В эти же годы была опубликована переписка Гаусса и открылось его скрываемое ранее отношение к новой геометрии, что тоже способствовало признанию этих идей.

Другую интерпретацию уже для всей плоскости Лобачевского нашел через три года Ф.Клейн. Он опирался на результаты, полученные в проективной геометрии, т.е. в геометрии, изучающей такие свойства фигур, которые сохраняются при центральных проектированиях плоскости на плоскость. В частности, таким свойством будет прямолинейность, так как прямая проектируется в прямую. Однако здесь прямая рассматривается как замкнутая линия, ее замыкает бесконечно удаленная точка. Длины и углы – это не проективные понятия, так как при проектировании фигур длины и величины углов меняются.

Но в 1859 г. А.Кэли ввел понятие проективной метрики. Он установил, что если задана некоторая линия второго порядка (Кэли назвал ее абсолютом), то, используя левую часть ее уравнения (это – однородная квадратичная форма, если пользоваться однородными проективными координатами), можно составить такую формулу, что для любых двух заданных прямых (и соответственно для любых двух точек) это выражение будет принимать такое числовое значение, что эти числа поведут себя как угол между прямыми (и соответственно расстояние между двумя точками). Т.е. при совпадении двух прямых (соответственно точек) получаем число нуль, а при образовании угла из двух прилежащих углов (соответственно отрезка из двух прилежащих отрезков) эти числа складываются (говорят, что имеет место аддитивность).

Вместе с тем эти числа проективно инвариантны, т.е. они не изменяются, если и абсолют, и рассматриваемые прямые (соответственно точки) подвергнуть вместе любому проективному преобразованию. Выражения, дающие эти величины: "проективный угол" и "проективное расстояние", Кэли назвал проективной метрикой. Он также показал, что если абсолют мнимый, т.е. не имеет вещественных точек (его уравнению можно тогда придать вид $x^2 + y^2 + z^2 = 0$), то проективная метрика совпадает с обычной метрикой сферической геометрии. Но здесь есть и не отмеченная им разница: две различные прямые здесь всегда пересекаются, но не в двух, а только в одной точке. Такую геометрию впоследствии Ф.Клейн назвал эллиптической. В этой геометрии сумма углов треугольника больше π. Еще до работы Кэли такую геометрию рассматривал Б.Риман, но его работа была опубликована только в 1868 г.

Ф.Клейн сопоставил формулы Кэли с формулами Е.Бельтрами, и обобщил результаты последнего. Бельтрами отображал при своих исследованиях поверхность псевдосферы внутрь круга так, что геодезические линии изображались на плоскости прямыми, т.е. роль абсолюта здесь играла окружность. Клейн дал существенно более простые формулы для измерения расстояний (выразив последние через логарифм ангармонического отношения двух данных точек и двух точек пересечения прямой отрезка с абсолютом). Он изучил проективные преобразования, которые переводят точки абсолюта в может быть другие, но тоже точки абсолюта (говорят, что абсолют переводится в самого себя). Это будет аналог движения плоскости, так как свобода подвижности здесь такая же, а проективные углы и длины при этом сохраняются.

В итоге в 1871 г. он связал идеи проективной метрики с теорией параллелей и показал, что с помощью проективной метрики интерпретируется не только эллиптическая геометрия (абсолют мнимый), но и геометрия Лобачевского (он ее назвал гиперболической). Для интерпретации геометрии Лобачевского надо взять вещественный абсолют (его уравнение можно привести к следующему виду: $x^2+y^2-z^2=0$) и рассматривать только точки, лежащие внутри абсолюта. Значит роль прямых играют отрезки прямых (хорды), лежащие внутри абсолюта. Интерпретация Клейна построена на понятиях проективной геометрии (проективная интерпретация) и охватывает ***всю плоскость Лобачевского.*** Следовательно, ***вопрос о непротиворечивости геометрии Лобачевского был решен полностью и окончательно***. Для пояснения обратимся к чертежу. Здесь изображены P – точка плоскости Лобачевского и прямая AB. Концы хорды A_0 и B_0 уже не изображают точек плоскости Лобачевского. Это изображение бесконечно удаленных точек прямой, т.е. недостижимых с помощью движения. Через P проведены к AB две параллели. Это $PB\sim$ (в одном направлении) и $PA\sim$ (в другом). Они проходят через бесконечно удаленные точки B_0 и соответственно A_0 прямой AB, но с прямой общих точек (в собственном смысле) не имеют. Они только сближаются с ней при удалении точки в бесконечность (т.е. при приближении точки к B_0 и соответственно к A_0). Легко представить себе пучок прямых, проходящих через P и пересекающих AB, и пучок прямых (включая параллели), не пересекающих AB. Параллели являются крайними прямыми второго пучка, остальные его прямые расходящиеся. Следует помнить, что величины расстояний и углов вычисляются при этом по особым формулам проективной метрики и не совпадают с обычными.

Клейн также показал, что евклидова геометрия тоже может быть интерпретирована с помощью проективной метрики. Нужно только рассмотреть промежуточный случай между эллиптической и гиперболической метрикой. Роль абсолюта будет играть пара мнимых комплексно сопряженных точек на бесконечно удаленной прямой (его уравнения можно привести к виду $x^2+y^2=0$, $z=0$). Это – случай параболической метрики. Еще до Клейна соответствующие этому случаю формулы для углов были даны французским математиком Э.Лагерром (1853 г.).

Через 11 лет после работы Ф. Клейна еще одна новая интерпретация геометрии Лобачевского была дана А.Пуанкаре. В 1882 г. он разрабатывал теорию очень важных по применениям функций комплексного переменного, теорию фуксовых функций. Теперь их называют автоморфными (они находят разнообразные применения в механике и в теоретической физике).

При разработке этой теории он столкнулся с очень большими трудностями, но затем неожиданно для себя пришел к мысли, что геометрические свойства фигур, построенных из дуг окружностей, которые он рассматривал, изучая свойства автоморфных функций, те же, что и свойства прямолинейных фигур в пространстве Лобачевского, и это помогло ему решить проблему [41]. Таким образом он нашел следующую интерпретацию.

Плоскость Лобачевского – внутренность обычной окружности. Прямые Лобачевского – дуги окружностей, пересекающих упомянутую окружность (абсолют) под прямыми углами и лежащие внутри ее. ***Углы Лобачевского – обычные углы*** (поскольку углы имеют натуральную величину, эту интерпретацию называют конформной. Здесь в бесконечно малом сохраняется и форма фигур). Однако вычисление длин надо производить по особым формулам, аналогичным проективной метрике. Для пояснения на рис. 12 изображена та же ситуация, что и на предыдущем рис. 11. Рекомендуется сравнить и проанализировать эти рисунки.

Появление различных интерпретаций неевклидовой геометрии сыграло очень важную роль в разработке оснований математики. Началось дальнейшее уточнение и развитие аксиоматического метода и построение строгих аксиоматик для различных математических дисциплин. Так, прежде всего аксиомы Евклида были переработаны и дополнены новыми аксиомами, которые ранее не были учтены, а именно, аксиомами, характеризующими понятие порядка точек на прямой и на плоскости (Паш) и понятие непрерывности (Дедекинд, Кантор). Ранее при доказательствах свойств, связанных с этими понятиями, просто ссылались на чертежи, что иногда вызывало грубейшие ошибки. Была построена аксиоматика арифметики (Пеано) и проективной геометрии (Веблен) и др. Аксиоматика евклидовой геометрии была в известном смысле завершена в работах Д.Гильберта (1899 г.) и В.Ф.Кагана (1902 г.).

Метод интерпретаций стал важным средством доказательства непротиворечивости системы аксиом для любой науки. Правда, это доказательство носит относительный характер, так как по существу вопрос только переносится в другую область, но зато в область хорошо изученной теории, в непротиворечивости которой нет оснований сомневаться, так как она, так сказать, проверена всесторонним опытом ее приложений.

Окончательный вывод формулируется так: исследуемая система аксиом непротиворечива постольку, поскольку непротиворечива используемая в интерпретации теория. Например, непротиворечивость своей системы аксиом для евклидовой геометрии Д.Гильберт свел к непротиворечивости арифметики*.

Постепенно к концу XIX в. выявились основные требования, предъявляемые к системе аксиом, и принципы аксиоматического метода. Их можно изложить сжато следующим образом.

А. Вводится в рассмотрение некоторое основное множество (и, может быть, его подмножества), элементы которого получают свои наименования или обозначения (например: точки *А*, *В*, ... прямые *a*, *б*, ... и плоскости α, β, ... и т.п.).

В. Допускается, что эти элементы могут находиться в некоторых основных отношениях друг к другу. (Например, прямая может проходить через точку, точка может лежать между двумя другими и т.п.). Эти отношения только называются, но их конкретный смысл никак не определяется.

С. Наконец, формулируются аксиомы, которые характеризуют свойства введенных основных отношений между элементами.

В математических выводах следует опираться только на логические выводы из аксиом (конкретное истолкование и наглядная картина обычно облегчают понимание, но могут привести и к ошибкам). Но чтобы эта система аксиом могла служить основой для логически выводимой содержательной теории (т.е. не такой теории, в которой вместе с каждым утверждением можно доказать и его отрицание) к ним предъявляются следующие требования.

1°. ***Система аксиом должна быть непротиворечивой.*** Непротиворечивость доказывается путем отыскания такой интерпретации, в которой все аксиомы системы выполняются. Как мы уже говорили, обычно доказывается условная непротиворечивость. Например, мы видели, что непротиворечивость системы аксиом геометрии Лобачевского сведена к непротиворечивости геометрии Евклида, непротиворечивость последней сведена к непротиворечивости арифметики.

2° (требование 2° не обязательно, но желательно). ***Система аксиом должна быть независимой*** (в ней не должно содержаться лишних, избыточных аксиом, т.е. таких, которые можно доказать как теоремы, исходя из прочих аксиом).

Независимость какой-либо аксиомы, если не видна непосредственно ее зависимость, можно доказывать следующим образом. Вместо исследуемой аксиомы вводят другую, противоречащую первой. Если после этого удастся доказать непротиворечивость этой измененной системы аксиом, то этим доказывается и независимость той аксиомы, которая была исключена. Действительно, если бы исключенная аксиома была зависима от прочих, то хотя мы ее и исключили, она как теорема могла бы быть выведена из прежних остальных (пусть мы не знаем как), т.е. она, присутствуя как теорема, стояла бы в противоречии с вновь введенной аксиомой; иначе говоря, новая система была бы противоречива. Поэтому если для новой системы удастся найти интерпретацию, то этим и доказывается независимость исключенной аксиомы от остальных аксиом прежней системы.

Такой подход к доказательству независимости исторически возник благодаря созданию неевклидовой геометрии. Аксиоматика геометрии Лобачевского отличалась от обычной евклидовой только тем, что аксиома параллельности была другой, вместо одной параллели допускалось существование большего числа прямых, не пересекающих данную. Поэтому, убедившись с помощью отыскания интерпретации в непротиворечивости геометрии Лобачевского, мы доказали этим самым и независимость пятого постулата Евклида от прочих аксиом, т.е. невозможность его доказать, исходя из остальных аксиом.

3°. *Система аксиом должна быть полной.* Это требование не всегда предъявляют к системе аксиом. Во многих теориях от него отказываются (например, в алгебре, в теории групп и в некоторых геометрических теориях), но при аксиоматизации евклидовой геометрии оно предъявляется. Заключается оно в том, чтобы все интерпретации были изоморфны, т.е. чтобы между основными элементами и отношениями в любых двух интерпретациях можно было установить взаимно однозначное соответствие такого рода, что соответственные элементы всегда находятся в соответственных отношениях и в той и в другой интерпретации, хотя истолковываться и элементы, и отношения могут в каждой интерпретации по-своему.

Для системы аксиом евклидовой геометрии доказательство того, что это требование выполняется, можно получить, например, путем рассмотрения некоторой декартовой системы координат, вводимой в пространстве. На этом пути устанавливается изоморфизм каждой интерпретации с арифметической интерпретацией, а следовательно, и всех интерпретаций между собой.

ПОДХОД РИМАНА К УЧЕНИЮ О ПРОСТРАНСТВЕ. РИМАНОВЫ ПРОСТРАНСТВА И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ. ОБОБЩЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ИССЛЕДОВАНИЯ В СССР ПО НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Новый подход к развитию учения о неевклидовых пространствах был изложен **Бернгардом Риманом** (1826 – 1866) в лекции, прочитанной им при вступлении в должность профессора Геттингенского университета в 1854 г. (“О гипотезах, лежащих в основании геометрии”. Опубликовано в 1868 г. посмертно. Русский перевод в [34, с. 309 – 325]). Риман дал глубокое обобщение понятия пространства, исходя из идей Гаусса о внутренней геометрии поверхности (Гаусс присутствовал на его лекции) (см. с. 53). Вместо термина “пространство” он стал употреблять термин “многообразие”, элемент многообразия назван точкой. Точка (точнее ее положение в многообразии) характеризуется *n*-числами $(x_1, x_2, ..., x_n)$, названными ее координатами (теперь обычно номер координаты пишут справа наверху, но его не следует путать с показателем степени). Можно рассматривать не только многообразие точек поверхности, отнесенных к криволинейным координатам u и v $(x_1=u,\ x_2=v)$, но и, например, многообразие состояний механической системы, многообразие цветов спектра и др., так что число координат (или, иначе говоря, число измерений многообразия) может быть различно. Геометрия этого многообразия задается, подобно случаю поверхности, выражением для линейного элемента, т.е. квадратом расстояния между двумя бесконечно близкими точками $(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ и $(x_1+dx_1,\ x_2+dx_2,\ ...x_n+dx_n)$, в виде квадратичной формы относительно дифференциалов координат.

Таким образом, геометрия римановых пространств является аналогом внутренней геометрии поверхности. В ней аналогично вводятся следующие геометрические понятия: измерение длин дуг линий, углов между пересекающимися линиями площадей и объемов (различной размерности); понятие геодезической (кратчайшей) линии; и, наконец, понятие аналога гауссовой кривизны – кривизны в данной точке в данном двумерном направлении. Далее возникает вопрос о совпадении геометрий двух заданных пространств (аналог задачи о наложимости двух поверхностей) и другие задачи.

Отыскивая наиболее простые по своему строению типы пространств, Риман ***выделил пространства постоянной кривизны (К = const)***, т.е. такие, что у них кривизна не меняется, если менять двумерное направление в данной точке или переходить от точки к точке. Естественно различаются три случая таких пространств: К>0 (положительной кривизны), К=0 (нулевой кривизны) и К<0 (отрицательной кривизны). Все эти пространства (и только они) обладают замечательным свойством свободной подвижности, т.е. при одинаковом *К* куски их (выражаясь условно) могут свободно налагаться друг на друга, подобно тому, как это получается с поверхностями постоянной кривизны.

Геометрию пространства постоянной положительной кривизны (*К*>0) называют теперь геометрией Римана или эллиптической геометрией (по Ф.Клейну). В этой геометрии геодезические линии замкнуты и имеют конечную постоянную длину. На двумерной плоскости две геодезические всегда пересекаются и притом в одной точке. В случае двух измерений {*п* = 2) получается как бы сферическая геометрия, но с той разницей (мы об этом уже упоминали), что пересечение двух геодезических происходит не в двух точках, а в одной.

Во втором случае, когда кривизна нулевая (K=0), получается параболическая, по Ф.Клейну, геометрия. Она совпадает с евклидовой геометрией, если линейный элемент может иметь только положительные значения, т.е. если он, как говорят, знакоположителен.

Третий случай: геометрия постоянной отрицательной кривизны (K<0), совпадает с геометрией Лобачевского, но для любого числа измерений. Сам Риман этот случай подробно не исследовал. Совпадение выявилось потом, после работ Бельтрами. Эту геометрию называют гиперболической (следуя Ф.Клейну), или геометрией Лобачевского–Бойаи.

Таким образом, пространство Лобачевского оказалось одним из трех частных случаев римановых пространств.

Но особенное значение геометрии римановых пространств выявилось, когда она нашла применения в физических теориях и в механике. В 1905 г. была разработана частная (специальная) ***теория относительности***. **Альберт Эйнштейн** одновременно с А.Пуанкаре, опираясь на идею Лоренца о независимости электромагнитных процессов от равномерного прямолинейного движения (в случае скорости света это уже было подтверждено экспериментами Майкельсона), рассмотрел, какие изменения внесет это положение в механику. Был найден новый закон сложения скоростей, получена известная формула $E=mc^2$ (связь между массой и энергией, где c – скорость света), зависимость массы от скорости.

Пришлось изменить восходящую к Ньютону раздельную трактовку пространства и времени. Оказалось, что пространственные расстояния и интервалы времени не имеют абсолютного значения и для двух двигающихся друг относительно друга систем связаны между собой так называемыми преобразованиями Лоренца. Относительность пространства и времени и абсолютный смысл определенной связи между ними и являются сущностью этой теории. Физические явления стали изучать, рассматривая их в едином четырехмерном многообразии ***пространство – время*** (или говорят также – в пространстве событий), элемент которого задается четырьмя координатами (x, y, z, t), где первые три координаты характеризуют пространственное положение события, а четвертая – положение во времени.

Теория относительности коренным образом изменила понимание физических процессов. Она позволила связать химию и физику, а в дальнейшем, опираясь на эту теорию, удалось извлекать и практически использовать атомную энергию. В дальнейших исследованиях, начиная с 1916 г., А.Эйнштейн развил ***общую теорию относительности***, которой охватывались и явления тяготения, вызываемые распределением масс в пространстве.

С тех пор, как римановы пространства стали играть важную роль в физических теориях, к ним возник все усиливающийся интерес. Это, конечно, способствовало более глубокому их изучению. Вскоре стали появляться и различные их обобщения – пространства аффинной, проективной и конформной связности, а также пространства различных опорных элементов (финслерово пространство, пространство Э.Картана и др.), и, далее, вообще была развита теория расслоенных пространств. Существенный вклад в первоначальное развитие этих теорий был внесен Г.Вейлем, Э.Картаном, Я.Схоутеном, Л.Эйзенхартом, О.Вебленом, Т.Томасом, П.Финслером, Л.Бервальдом и др.

В СССР, начиная с 20-х годов, сложилась значительная группа геометров, развивающих эту область тензорными методами. В Казанском университете это – П.А.Широков (1895 – 1944) и его школа (И.П.Егоров, Б.Л.Лаптев, А.З.Петров (1910 – 1972), П.И.Петров (1916 – 1974) и др.), в Московском университете – В.Ф.Каган (1869 – 1953) и его школа – участники семинара по векторному и тензорному анализу (В.В.Вагнер, Г.Б.Гуревич, А.М.Лопшиц, А.П.Норден, П.К.Рашевский, Б.А.Розенфельд, И.М.Яглом и др.)[42].

В заключение мы рассмотрим кратко исследования в области собственно геометрии Лобачевского. Здесь прежде всего следует указать на работы **А.П.Котельникова** (1865 – 1944), который в своих диссертациях– магистерской (“Винтовое счисление”, 1895) и докторской (“Проективная теория векторов”, 1899) – заложил основы механики неевклидовых пространств, используя геометрию над алгебрами. В работе 1927 г. “Принцип относительности и геометрия Лобачевского” он выделил особый класс неевклидовых пространств и указал, что в теории относительности пространство скоростей является пространством Лобачевского [26]. П.А.Широков исследовал ряд важных вопросов геометрии и механики неевклидовых пространств, в том числе нашел новые признаки, выделяющие эти пространства из более общих – римановых, а затем нашел и изучил близкие с ним замечательные типы пространств–симметрические, приводимые и названные впоследствии пространствами Широкова – Келера [38, 44].

Идеи А.П.Котельникова о разработке геометрий над алгебрами для изучения свойств неевклидовых пространств были развиты и обобщены А.П.Норденом, Б.А.Розенфельдом, А.П.Широковым, В.В.Вишневским и др.

Изучению жизни и творчества Лобачевского посвящена обширная литература. О Полном собрании сочинений (1946 – 1951), в котором все его труды были тщательно прокомментированы, уже упоминалось ранее. Неоднократно издавались и избранные геометрические исследования [2,3]. Были проведены ценные исследования биографического характера с анализом различных сторон деятельности ученого. Так, вышла большая монография В.Ф.Кагана, посвященная жизни и идеям Лобачевского [21, 22], а также были опубликованы интересные и многочисленные материалы к его биографии, составленные Л.Б.Модзалевским [7]. Б.В.Болгарским [12], Э.Д.Днепровым [16], В.М.Нагаевой [4, 30] и другими, детально освещены его педагогические взгляды. Работы Э.Кольмана [25], С.А.Яновской [49], Г.Ф.Рыбкина [36] и некоторых других посвящены философским основам его творчества.

Созданы прекрасные и доступные изложения начал его геометрии (П.А.Широков [45], А.П.Норден [31], Б.Н.Делоне [15] и др.), а также многочисленные очерки его жизни и деятельности.

Нельзя не упомянуть также об отражении жизни и идей Лобачевского в художественной литературе. В романе И.Заботина “Лобачевский” [52] показана и деятельность ученого, и жизнь Казани, и университетские события того времени. Повесть Д.Тарджеманова “Юность Лобачевского” [51] посвящена юным годам и становлению идей великого геометра, в ней много эпизодов из истории гимназической жизни и начала университетского периода. Повесть того же автора “Серебряная подкова”, вышедшая в свет в 1976 г., охватывает больший период жизни Лобачевского [50]. Представляет интерес и книга М.Колесникова “Лобачевский” [53].

О ПРИМЕНЕНИИ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО В МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ. ФИЛОСОФСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

О тех применениях, которые дал своей геометрии сам Лобачевский, было кратко сказано ранее.

Во-первых было важно проверить, не подчиняются ли свойства реального пространства его новой более общей геометрии.

Если учесть, что для бесконечно-малых фигур, как доказал Лобачевский, новая геометрия совпадает с обычной, то из того, что для земных расстояний всегда приближенно подтверждается опытом правильность евклидовой геометрии, еще не следует, что на громадных протяжениях пространства геометрия окажется тоже евклидовой. Если допустить, что земные расстояния очень малы по сравнению с радиусом кривизны k, то для выяснения действительной геометрии физического пространства, в котором роль прямых играют световые лучи, нужно измерять фигуры гораздо больших размеров. Поэтому уже в своей работе 1829 г. Лобачевский стал рассматривать громадный треугольник, двумя вершинами которого M_1 и M_2 служат положения Земли на концах большой оси ее орбиты, а третьей – некоторая звезда S, лежащая в направлении, перпендикулярном этой оси. Астрономы называют годичным параллаксом p звезды S половину разности углов – внешнего при одном конце M_1 и внутреннего при другом конце M_2 – треугольника M_1M_2S. Эти углы можно измерить, находясь на Земле. Предполагая геометрию евклидовой, астрономы отождествили эту разность $2p$ с углом при вершине S, под которым виден из точки S отрезок M_1M_2 – большая ось орбиты. Действительно, в евклидовой геометрии внешний угол треугольника равен сумме двух с ним несмежных внутренних углов, а поэтому разность внешнего и внутреннего равна углу при точке S. Но параллакс p величина очень малая, так как звезды находятся на громадных расстояниях от Земли и, следовательно, прямые M_1S и M_2S почти параллельны. Из-за малости долгое время p не удавалось измерить с необходимой точностью, а следовательно, и вычислить расстояние от Земли до звезд. Но по мере совершенствования астрономических инструментов и методов наблюдений результаты улучшались. К настоящему времени выяснилось, что первое достаточно точное измерение параллакса было выполнено только в 1837 г. в Дерпте астрономом В.Я.Струве для звезды Веги (р = 0",12). Теперь измерено уже более 20 тысяч параллаксов звезд. Однако попытки определить параллаксы звезд делались астрономами и раньше, начиная с XVIII в. Лобачевский воспользовался новейшими для его времени результатами, опубликованными в 1828 г., в которых были указаны параллаксы трех звезд. Конечно, эти данные оказались, как впоследствии выяснилось, весьма грубыми, но порядок величин p, менее 1", был все-таки приближенно верен. Впоследствии наибольший из измеренных параллаксов звезд оказался равным 0",76, откуда было выведено, что расстояние до этой ближайшей звезды приблизительно в 270 тыс. раз больше, чем расстояние от Земли до Солнца.

Лобачевский стремился найти нижнюю границу для постоянной k. Он нашел

$$k>332000\ a,$$

т.е. k не менее чем в 332 тыс. раз больше расстояния a от Земли до Солнца. Отсюда Лобачевский вывел, что если в пространстве действует новая геометрия, то даже в очень больших треугольниках, имеющих размеры порядка поперечника земной орбиты, отклонение суммы углов от 180° не может превышать 0", 000004, т.е. даже точнейшими измерениями его обнаружить невозможно.

Таким образом, с помощью своей геометрии Лобачевский обосновал с громадной степенью точности практическую применимость обычной, можно сказать, упрощенной геометрии. Поэтому свою геометрию он стал называть “воображаемой”, а обычную – “употребительной”.

Но вопрос о геометрии Вселенной остался нерешенным, хотя Лобачевский и высказал предположение, что при расширении возможностей точных наблюдений, когда несравненно большие протяжения Вселенной будут доступны изучению, может выявиться, что в пространстве действует его общая геометрия.

В настоящее время уже измерены параллаксы меньшие, чем 0",01, и, следовательно, вычисленную Лобачевским нижнюю границу следует увеличить более чем в 62 раза. Тогда получаем

$$k > 20{,}10^6,$$

т.е. k по меньшей мере в 20 млн раз больше расстояния a от Земли до Солнца. Однако в этих рассуждениях предполагалось, что световые лучи точно реализуют прямые линии, тогда как наличие в пространстве материи может несколько изменять их направление, поэтому все приведенные расчеты имеют только ориентировочный характер.

Вторую область приложений своей общей геометрии Лобачевский нашел внутри самой математики, когда выяснил, что для реальных измерений, необходимых в жизненной практике, в технических и астрономических расчетах, новая геометрия излишня. Он показал, какую пользу приносит ее применение в некоторых вопросах математического анализа, а именно при отыскании определенных интегралов.

Для практических применений в физике, астрономии и технике, а также для математических расчетов большое значение имеют выводимые методами математического анализа формулы, дающие выражения значений определенных интегралов от различного рода функций, содержащих обычно некоторые параметры. Очень часто найти такое выражение в конечном виде через элементарные функции (или через часто употребляющиеся трансцендентные функции) путем непосредственного интегрирования не удается (конечно, может быть, что такого выражения и не существует). Тогда пытаются применить различные приемы (разложение в ряд, дифференцирование по параметру и др.), чтобы решить задачу. Среди этих приемов существует и такой: учитывая, что определенный интеграл с геометрической точки зрения можно рассматривать как площадь или объем, выполняют переход к другой системе координат и пытаются уже в новой системе вычислить площадь той же фигуры или объем того же тела. Лобачевский решил применять этот прием, но пользуясь преобразованиями координат не в евклидовом, а в своем пространстве. Это открыло новые возможности в преобразованиях подынтегральной функции и позволило ему найти на этом пути несколько сотен новых формул [1, т. 3], более 200 из которых вошли впоследствии в известный справочник “Таблицы определенных интегралов Биеренс де Хаана”, изданный в Амстердаме в 1858 г.

Для многих инженеров, физиков и математиков обычно остается неизвестным, что и в современных справочниках и таблицах определенных интегралов содержатся формулы, полученные Лобачевским методами его “воображаемой” геометрии.

Другие математические приложения его геометрии были указаны А.Пуанкаре (см. с. 56), а именно приложение к разработке теории автоморфных функций, обобщающих периодические функции и находящих применения и в механике, и в физике. Применение геометрии Лобачевского обеспечило успех в создании этой важной теории.

Но все-таки сам Лобачевский был уверен, что его геометрия еще найдет применения в физике, что более общая, чем евклидова, система геометрии не может не отражать закономерностей самой природы. Он писал, например, что *“такой Геометрии может быть следуют молекулярные силы”*, и далее, предвосхищая идеи общей теории относительности Эйнштейна, он высказал свои убеждения так: *“...В том однакож нельзя сомневаться, что силы всё производят одни: движение, скорость, время, массу, даже расстояния и углы”* (понятие силы включало в его время и понятие энергии), т.е. он утверждал связь и зависимость геометрических и временных свойств от распределения и состояния движущейся материи. Он был убежден, что на громадных, пока недостижимых для наблюдений, протяжениях Вселенной действует именно его геометрия.

Развитие физики показало, что геометрия Лобачевского является необходимой составной частью теории относительности. Одно из таких приложений было найдено русским физиком **А.А.Фридманом** (1888 – 1925). В 1922 г., опираясь на идеи общей теории относительности и решая уравнение Эйнштейна, он нашел важный вид линейного элемента, из которого следовало, что Вселенная расширяется с течением времени. Этот неожиданный факт потом подтвердился наблюдениями американского астронома Хэббла, наблюдавшего в 1929 г. “разбегание” далеких туманностей. Метрика Фридмана при фиксированном времени оказалась пространством Лобачевского, поэтому физики называют теперь это четырехмерное риманово пространство пространством Фридмана – Лобачевского.

Другое, может быть наиболее важное, приложение геометрии Лобачевского в теории относительности связано с рассмотрением пространства относительных скоростей. Это пространство (как отмечалось на с. 62) оказалось пространством Лобачевского, что было в сущности уже в 1910 г. отмечено Ф.Клейном, но в такой форме, что для физиков этот результат остался почти неизвестен. В ряде работ сербский математик В.Варичак отыскивал связи между геометрией Лобачевского и теорией относительности. Вполне отчетливо упомянутый факт был сформулирован в 1923 г. А.П.Котельниковым [26], но и после этого долгое время физиками не использовался, по-видимому, из-за незнания геометрии Лобачевского. Но в 1950-х годах на эту связь обратил внимание академик В.Фок, а затем физики из Объединенного института ядерных исследований в Дубне: Н.А.Черников, Я.И.Смородинский и другие [37, 42, 43] – начали с успехом применять геометрию Лобачевского при разработке вопросов физики элементарных частиц и ядерных реакций и пропагандировать свои методы.

Таким образом, “воображаемая” геометрия оказалась весьма действенным инструментом в разрешении проблем этого раздела физики.

Создание новой геометрии явилось важным этапом в логическом развитии учения о возможных свойствах пространства и способствовало разработке дальнейших обобщений, так как самый трудный первый шаг был сделан. Особенно важное значение имело появление неевклидовой геометрии для разработки оснований математики, так как основные положения современного аксиоматического метода вырабатывались главным образом под влиянием геометрии Лобачевского (с. 57 – 59).

Нельзя также забывать, что появление неевклидовых геометрий сыграло важную роль в борьбе материалистической философии с идеалистической трактовкой пространства и времени в широко распространенной в XIX в. философии И.Канта. Кант полагал, что пространство и время не являются объективными формами существования материи, а проявляются лишь как формы нашего воззрения Anschauung на мир, как формы нашего восприятия. Причем евклидова геометрия – это единственная мыслимая геометрия, всем нам непосредственно очевидная, поскольку она порождена характером нашего воззрения на мир.

Появление новой геометрии – геометрии Лобачевского отчетливо поставило вопрос об эксперименте, чтобы выяснить, какая из систем геометрии реализуется в физическом пространстве. Таким образом, объективная сущность пространства была отчетливо выявлена, а идеалистическая трактовка Кантом этого вопроса опровергнута.

Напряженная многолетняя деятельность Николая Ивановича Лобачевского, вдохновленного своим высоким идеалом ученого, отдавшего все силы развитию науки и просвещения, принесла замечательные результаты. Еще Д.И.Менделеев, оценивая его научный подвиг, сказал, что самобытность геометрии Лобачевского явилась зарей самостоятельного развития наук в России, Но мы не можем забывать и о значении его организационных, педагогических и методических трудов для России [43]. Руководя Казанским университетом и школами вверенного ему учебного округа, Лобачевский сам вел в университете преподавание многих физико-математических дисциплин. Причем влияние его педагогических идей осуществлялось не только путем личного преподавания, но и через его учеников и последователей, и проникало затем через студентов, окончивших курс, в школы округа, наряду с его же официальными методическими наставлениями, советами и указаниями[44].

В результате всех его трудов и забот о студентах и сотрудниках, о строительстве и оборудовании, о библиотеке и научных учреждениях, о программах и планах, о методах преподавания и об ученых изданиях университет преобразовался в одно из лучших научно-учебных заведений России, а уровень школьного преподавания в Казанском округе оказался выше, чем в других округах.

Вместе с тем Лобачевский не прекращал до последних дней жизни своих научных исследований. И если его научные идеи не были поняты современниками (так, в частности, ни один из его учеников не продолжил его геометрических исследований), то впоследствии они утвердили его имя как имя борца и революционера в науке, чьи гениально смелые идеи нарушили тысячелетние устои и во многом предопределили дальнейшее развитие математических наук.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лобачевский Н.И.** Полн. собр. соч.: В 5-ти т. – М.;Л., 1946 – 1951.
Т. 1. Геометрические исследования по теории параллельных линий. О началах геометрии. – М.;Л., 1946.
Т. 2. Геометрия. Новые начала. – М.;Л., 1949.
Т. 3. Воображаемая геометрия. Применения воображаемой геометрии. Пангеометрия. – М.;Л., 1951.
Т. 4. Сочинения по алгебре. – М.;Л., 1948.
Т. 5. Сочинения по математическому анализу, теории вероятностей, механике и астрономии. – М.;Л., 1951.
2. **Лобачевский Н.И.** Избранные труды по геометрии. – М.: Изд-во АН СССР, 1956.
Геометрические исследования по теории параллельных линий. Новые начала. Воображаемая геометрия. Речь о важнейших предметах воспитания.
3. **Лобачевский Н.И.** Три сочинения по геометрии. – М., 1956.
Геометрия. Геометрические исследования по теории параллельных линий. Пангеометрия.
4. **Лобачевский Н.И.** Наставления учителям математики в гимназиях // Труды Ин-та истории естествознания АН СССР. – 1948. № 2; см. также [6].
5. **Лобачевский Н.И.** Инструкция о преподавании физики в гимназиях. – ЦГА ТАССР, ф. 92, on. I, д. 3231, лл. 67–70 об.; см. также [6].
6. **Лобачевский Н.И.** Научно-педагогическое наследие. Руководство Казанским университетом. Фрагменты. Письма. – М.;Л.: Наука, 1976.
7. Материалы для биографии Н.И.Лобачевского / Сост. и ред. Л.Б.Модзалевский. – М.: Изд-во АН СССР, 1948.
8. **Александров П.С.** Н.И.Лобачевский – великий русский математик. – М., 1956.
9. **Александров П.С.** Что такое неэвклидова геометрия. – М., 1950.
10. **Александров П.С., Колмогоров А.Н.** Николай Иванович Лобачевский (1793–1843). – М., 1943.
11. **Андронов А.А.** Где и когда родился Н.И.Лобачевский // Историко-математические исследования. – 1956. – Вып. 9.
12. **Болгарский Б.В.** Казанская школа математического образования. Ч. 1. – Казань, 1967.
13. **Больай Я.** Аппендикс. – М.;Л., 1950.
14. **Гайдук Ю.М.** Дополнительные материалы к истории распространения идей Н.И.Лобачевского в России // Историко-математические исследования. – 1956. – Вып 9.
15. **Делоне Б.Н.** Элементарное доказательство непротиворечивости планиметрии Лобачевского. – М., 1956.
16. **Днепров Э. Д.** Вводные статьи в кн. [6] к разделу IV. Руководство учебными заведениями Казанского учебного округа.
17. **Егоров И.П.** Введение в неевклидовы геометрии. – Пенза, 1972.
18. **Ефимов Н.В.** Высшая геометрия. – Изд. 5-е. – М., 1971.
19. **Киро С.Н.** Н.И.Лобачевский и математика в Казанском университете // История отечественной математики: В 4-х т. Т. 2. Гл. IV. – Киев, 1967.
20. **Каган В.Ф.** Лобачевский и его геометрия. – М., 1955.
21. **Каган В.Ф.** Лобачевский. – М.;Л., 1948.
22. **Каган В.Ф.** Лобачевский. Изд. испр. и доп. – М.: Наука; Мир, 1974. – На франц. яз. (Перевод [21]).
23. **Каган В.Ф.** Очерки по геометрии. – М., 1963.
Основания геометрии. Лобачевский, Бойай. Геометрия в ее историческом развитии. Геометрические идеи Римана и др.
24. **Каган В.Ф.** Основания геометрии. Ч. 1. – М.;Л., 1949.
25. **Кольман Э.** Великий русский мыслитель Н.И.Лобачевский. – М., 1956.
26. **Котельников А.П.** Принцип относительности и геометрия Лобачевского // In memoriam Lobatschevsckii. II. – Казань, 1927.
27. **Кутузов Б.В.** Геометрия Лобачевского и элементы оснований геометрии. – М., 1950.
28. **Лаптев Б.Л.** Теория параллельных прямых в ранних работах Н.И.Лобачевского // Историко-математические исследования. – 1951. – Вып. 4.
29. **Лаптев Б.Л.** О библиотечных записях книг и журналов, выданных Н.И.Лобачевскому // Успехи матем. наук. – 1959. – 14. – Вып. 5.
30. **Нагаева В.М.** Педагогические взгляды и деятельность Н.И.Лобачевского // Историко-математические исследования. – 1950. – Вып. 3.
31. **Норден А.П.** Элементарное введение в геометрию Лобачевского. – М., 1953.
32. **Норден А.П.** Гаусс и Лобачевский // Историко-математические исследования. – 1956. – Вып. 9.
33. **Норден А.П.** Вопросы обоснования геометрии в работах Н.И.Лобачевского // Историко-математические исследования. – 1958. – Вып. II.
34. Об основаниях геометрии. – М., 1956.
Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию его идей.
35. **Розенфельд Б.А., Яглом И.М.** Неевклидовы геометрии // Энциклопедия элементарной математики. Кн. 5. – М., 1966.
36. **Рыбкин Г.Ф.** Материализм – основная черта мировоззрения Н.И.Лобачевского // Историко-математические исследования. – 1950. – Вып. 3.
37. **Смородинский Я.А.** Геометрия Вселенной // Эйнштейн и развитие физико-математической мысли. – М., 1962.
38. Сто двадцать пять лет неэвклидовой геометрии Лобачевского (1826 – 1951). – М.;Л., 1952.

39. Страницы великой культуры от древнейшей русской рукописной книги до первой записи, сделанной советским человеком в Космосе. – М., 1970.

40. **Федоренко Б.В.** Годы учения Н.И.Лобачевского и его первые геометрические исследования // Труды Ин-та истории естествознания и техники АН СССР. – 1957. – 17.

41. **Федоренко Б.В.** Некоторые сведения к биографии Н.И.Лобачевского // Историко-математические исследования. – 1956. – Вып. 9.

42. **Черников Н.А.** Геометрия Лобачевского и теория относительности // Международная зимняя школа теоретической физики при ОИЯИ. – Дубна. – 1964. – 3.

43. **Черников Н.А.** Геометрия Лобачевского и релятивистская механика // Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 1973. – 4. – Вып. 3.

44. **Широков П.А.** Избранные работы по геометрии. – Казань, 1966.

45. **Широков П.А.** Краткий очерк основ геометрии Лобачевского. – Казань, 1964; М., 1955; см. также: **Широков П.А., Каган В.Ф.** Строение неевклидовой геометрии. – М.;Л., 1955; Н.И.Лобачевский. – М.;Л., 1943.

46. **Шуртакова Т.В.** Руководство Казанского университета развитием начального и среднего образования в Казанском учебном округе в 1805 – 1836 гг. – Казань, 1959.

47. **Юшкевич А.П.** История математики в России до 1917 г. – М., 1968. – С. 229 – 273.

48. **Якунин П.Ф.** О деятельности Н.И.Лобачевского в области народного просвещения // Историко-математические исследования. – 1956. – 9.

49. **Яновская С.А.** Передовые идеи Н.И.Лобачевского – орудие борьбы против идеализма в математике. – М.;Л., 1950.

50. **Тарджеманов Д.** Серебряная подкова. – М.: Современник, 1976.

51. **Тарджеманов Д.** Юность Лобачевского. – Казань, 1965; Изд. 2-е. – Казань, 1968.

52. **Заботин И.** Лобачевский. – Казань, 1956.

53. **Колесников М.** Лобачевский. – М.: Молодая гвардия, 1965.

54. **Герасимова В.М.** Указатель литературы по геометрии Лобачевского и развитию его идей. – М., 1952.

Подробную библиографию по различным разделам неевклидовой геометрии, ее приложениям и жизни и деятельности Лобачевского см. также в [21, 22].

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. 150 лет геометрии Лобачевского: Всесоюзн. науч. конф. по неевкл. геометрии. Пленарные доклады. – М.: ВИНИТИ, 1977. – 207 с.

2. **Лаптев Б.Л.** Лобачевский – создатель неевклидовой геометрии // 150 лет геометрии Лобачевского. Пленарные доклады. – С. 15 – 22.

3. **Широков А.П.** Развитие геометрических идей Лобачевского в Казанском университете // 150 лет геометрии Лобачевского. – 1977. – С. 22 – 32.

4. **Черников Н.А.** Геометрия Лобачевского как физическая наука // 150 лет геометрии Лобачевского. Пленарные доклады. – С. 146 – 153.

5. **Каримуллин А.Г., Лаптев Б.Л.** Что читал Н.И.Лобачевский? (Записи книг и журналов, выданных Н.И.Лобачевскому из библиотеки Казанского университета). – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1979. – С. 1 – 126.

6. **Лаптев Б.Л.**Николай Иванович Лобачевский // Рассказы о казанских ученых. – Казань: Таткнига, 1983. – С. 5 – 19.

7. **Лаптев Б.Л.** Бартельс и формирование геометрических идей Лобачевского // Памяти Лобачевского посвящается. Вып. I. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1992. – С. 35 – 40.

8. **Васильев А.В.** Николай Иванович Лобачевский, 1792 – 1856. – М.: Наука, 1992. – 220 с.

9. **Гудков Д.А.** Н.И.Лобачевский. Загадки биографии. – Н.Новгород: Изд-во Нижегородск. ун-та, 1992. – 236 с.

10. **Ковалева Т.И., Филатов Н.Ф.** Н.И.Лобачевский и Нижегородский край на рубеже XVIII – XIX столетий. – Н.Новгород: Изд-во Нижегородск. ун-та, 1992. – 139 с.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] Дата рождения была установлена по материалам Нижегородского краевого архивного бюро и названа впервые в газетной статье 1929 г. Она подтверждена и обоснована в исследовании академика А.А.Андронова [11]. До этого в литературе считали, что Н.И.Лобачевский родился 20 октября 1793 г.

[2] О родителях И.М.Лобачевского см. статью Б.В.Федиренко [41]*.

[3] В книге Д.Тарджеманова [51] в живой художественной форме романа изображены различные этапы детства, юности и первых лет университетской деятельности великого геометра. Автор опирается, на документальный материал, но некоторые эпизоды – вымышлены.

[4] Годы обучения Н.И.Лобачевского в гимназии и в университете детально изучены по архивным документам Б.В.Федоренко [40]. Мы в основном опираемся на это исследование.

[5] Гимназическое обучение Н.И.Лобачевского завершилось к концу 1806 г.

[6] Академик С.Я.Румовский – математик и астроном – принадлежал к поколению первых русских ученых, воспитанных в Петербургской Академии наук (он был учеником Л.Эйлера). Организации Казанского университета он и в дальнейшем уделял большое внимание. Особо заботясь о преподавании физико-математических наук, он приглашал видных иностранных ученых.

[7] Это были – директор гимназии И.Ф.Яковкин (он фактически исполнял затем обязанности ректора университета в течение первых 10 лет) и П.А.Цеплин – преподаватель истории, географии и статистики, выходец из Германии.

[8] Это были Г.И.Корташевский, И.И.Запольский, Л.С.Левицкий и И.И.Эрих.

[9] **Аксаков С.Т.** Собр. соч.: В 4-х т. Т. 2. – М., 1955. – С. 123.

[10] Знание иностранных языков студентам было особенно необходимо, так как профессора-иностранцы обычно не знали русского языка и преподавание велось на латинском или немецком языке (иногда и на французском). Следует учесть также, что необходимая литература тоже обычно была на иностранных языках, так как русская учебная и научная литература была весьма немногочисленна.

[11] Его подлинное имя Иоганн-Мартин-Теодор, но в Казани его стали называть Мартином Федоровичем.

[12] Перевод с латинского сделан С.Я.Румовским.

[13] Старший из братьев Лобачевских – Александр утонул в 1807 г., так что речь идет о Николае.

[14] Ученая степень магистра присваивалась при окончании университета лучшим студентам. Остальные получали звание кандидата. Магистры оставались при университете для усовершенствования в науках под руководством профессора (аналог аспирантуры), которому также должны были помогать в преподавании, разъясняя студентам непонятные места.

[15] Результаты этого исследования вошли в XVI главу “Алгебры” (1834 г.) Лобачевского [1, т. 4, с. 259 – 282].

[l6] Сопроводительная записка сохранилась. Сочинение было написано на французском языке, “сделавшимся”, как писал Лобачевский, “ныне общим между учеными”. Оно имело переведенное выше заглавие “Exposition succincte des principes de la Gйometric avec une dйmonstration rigoureuse du thйorиme des parallиles” [1, т. 1, с. 415; 39]. Любопытно отметить, что в это время в университете правительственная комиссия ревизовала деятельность попечителя. В результате ревизии карьера его закончилась, Магницкий был предан суду сената.

[17] Сам Н.И.Лобачевский называл ее “воображаемой” в отличие от евклидовой, названной им “употребительной”. В последних своих трудах он пользовался названием “пангеометрия” (всеобщая геометрия), отражавшим тот факт, что евклидова входит в нее как предельный случай. Впоследствии Ф.Клейном было введено название “гиперболическая геометрия” (см. с. 55 – 56 данной работы).

[18] Отсюда современное слово “музей”.

[19] На русский язык “Начала” переводились несколько раз. Последний русский перевод: “Начала” Евклида / Пер. с греч. и комментарии Д.Д.Мордухай-Болтовского. Кн. 1 – 6. – М.;Л., 1948; кн. 7 – 10. – М.;Л., 1949; кн. 11 – 15. – М.;Л., 1950.

[20] Существуют варианты текста “Начал”, содержащие просто 11 аксиом, или 5 постулатов и 7 аксиом и др.

[21] В современных дедуктивных системах все исходные положения называют аксиомами.

[22] Естественно пожелать, чтобы исходные положения были выбраны по возможности простыми, но не всегда это требование удается выполнить.

[23] В современных школьных учебниках геометрии вместо постулата Евклида вводится обычно следующая аксиома параллельности. ***На плоскости через точку, лежащую вне прямой, проходит только одна параллель к этой прямой.*** В этой форме аксиома параллельности была введена впервые английским математиком XVIII в. Плэйфером. Следует напомнить, что две прямые называются у Евклида параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются. Что такие прямые существуют, доказывается легко. Действительно, на плоскости два перпендикуляра к одной прямой не могут пересечься (иначе существовала бы по симметрии и вторая точка M^1 пересечения, а тогда через точки M и M^1 проходили бы две различные прямые). Таким образом, эти перпендикуляры и дают пример двух параллелей. Поэтому в упомянутой аксиоме вместо “только одна” достаточно сказать “не более одной”.

[24] Доказательства в доступной форме см. в книгах [45, 31, 15] и др.

[25] Несколько измененный текст “Воображаемой геометрии” [11, т; 3].

[26] “Геометрические исследования” [1, т. I].

[27] Начало полного названия звучит в русском переводе так: “Прибавление, содержащее науку о пространстве абсолютно истинную, не зависящую от истинности или ложности XI аксиомы Евклида (что a priori никогда решено быть не может). С прибавлением, к случаю ложности, квадратуры круга”.

[28] Под этим сокращенным названием обычно и цитируется труд Я.Бойаи [13].

[29] Его наблюдения кометы под руководством профессора Литтрова в 1811 г. были опубликованы.

[30] В 1839/40 г. он читал также исчисление вероятностей.

[31] Необходимо отметить, что по запискам Лобачевского ряд лет читались лекции по математике и механике молодыми преподавателями – Н.О.Юферовым, М.И.Мельниковым, Н.Д.Брашманом, П.И.Котельниковым и другими, а также велось преподавание в Казанской гимназии.

[32] Последнюю фразу можно истолковать как намек на нередко преподаваемую в университетах в те годы модную идеалистическую натурфилософию шеллингианского толка.

[33] По-видимому, Лобачевский обращается далее к ним, но, может быть, здесь он подразумевает и других невежественных представителей привилегированных классов, – например, бюрократическое чиновничество или даже всех, кто, несмотря на имеющиеся материальные возможности, пренебрегает учением, образованием, расширением своего культурного кругозора.

[34] У Л.Б.Модзалевского указан год повторного представления этого обозрения (1825 – 1826). Первоначально оно было представлено на 1822 – 1823 гг.

[35] Научно-популярная статья “Происхождение и распространение звука в воздухе”, опубликованная Н.И.Лобачевским в 1823 г., т.е. еще до создания им новой геометрии [6].

[36] При изложении дальнейших событий в 1845 – 1846 гг. с любезного согласия С.Н.Корытникова нами были использованы выявленные им архивные материалы и его неопубликованная статья “Н.И.Лобачевский и И.М.Симонов в ректорских выборах 1845 и 1846 гг.”.

[37] В Древней Греции жителей Беотии (область в Средней Греции) принято было считать грубыми, не понимающими тонкостей людьми.

[38] Лауреатами этого конкурса в последующие годы были крупнейшие геометры: С.Ли, Б.Киллинг, Д.Гильберт, Ф.Шур, Г.Вейль, Э.Картан, из советских ученых – В.В.Вагнер [54]. После Отечественной войны новая премия имени Лобачевского была учреждена в 1950 г. Академией наук СССР. Она присуждалась в последующие годы А.Д.Александрову. Н.В.Ефимову, А.В.Погорелову, А.С.Понтрягину, Г.Хопфу и П.С.Александрову*.

[39] Полной кривизной K называется произведение K_1K_2 главных кривизн, т.е. экстремальных значений кривизн нормальных сечений поверхности (сечений поверхности плоскостью, проходящей через нормаль, т.е. через перпендикуляр к поверхности). Главные сечения оказываются всегда взаимно перпендикулярными.

[40] Если K<0, это значит, что одно из главных сечений выпукло, а другое вогнуто. Поверхность в каждой точке имеет тогда седлообразную форму.

[41] Он сам вспоминал впоследствии, что, решив отдохнуть от своих неудач, он принял участие в геологической экскурсии и совсем о них забыл. Но однажды, когда он только что вступил на подножку омнибуса, на котором должен был ехать дальше, у него внезапно возникла идея, что преобразования, им изучавшиеся, совпадают с движениями на плоскости Лобачевского. Потом, вернувшись, он проверил свою мысль и она подтвердилась (см. [21, с. 453]).

[42] Каждый из этих геометров создал свое самостоятельное научное направление исследований, охарактеризовать которое здесь мы не имеем возможности. Отметим лишь, что П.К.Рашевский руководит кафедрой и семинаром в МГУ, В.В.Вагнер возглавляет Саратовскую научную школу, А.П.Норден – Казанскую.

[43] В 1976 г. в издательстве “Наука” выходит в свет книга под названием: “Лобачевский Н.И.Научно-педагогическое наследие. Руководство Казанским университетом. Фрагменты. Письма”. Это – собрание первоисточников и статей, написанных Лобачевским, но не вошедших в Полное собрание сочинений (в том числе его “Речь”, учебные программы, конспекты и др.) [6].

[44] Так, например, Илья Николаевич Ульянов, поступивший на физико-математический факультет Казанского университета в 1850 г., не слушал лекций Лобачевского (в те годы ученый был помощником попечителя), но память о его заслугах высоко чтил весь университет, а такие преподаватели, как П.И.Котельников, А.Ф.Попов, М.В.Ляпунов и М.И.Мельников продолжали проводить в жизнь его педагогические и методические идеи. Впоследствии в своей работе Илья Николаевич не без влияния педагогических принципов Лобачевского проявил себя как выдающийся методист в области математики, как сторонник установления тесной связи преподавания с жизнью и противник формальных приемов обучения. Он затратил на это дело как инспектор немалый труд и добился существенного улучшения преподавания математики в Симбирской губернии [12].

ОГЛАВЛЕНИЕ